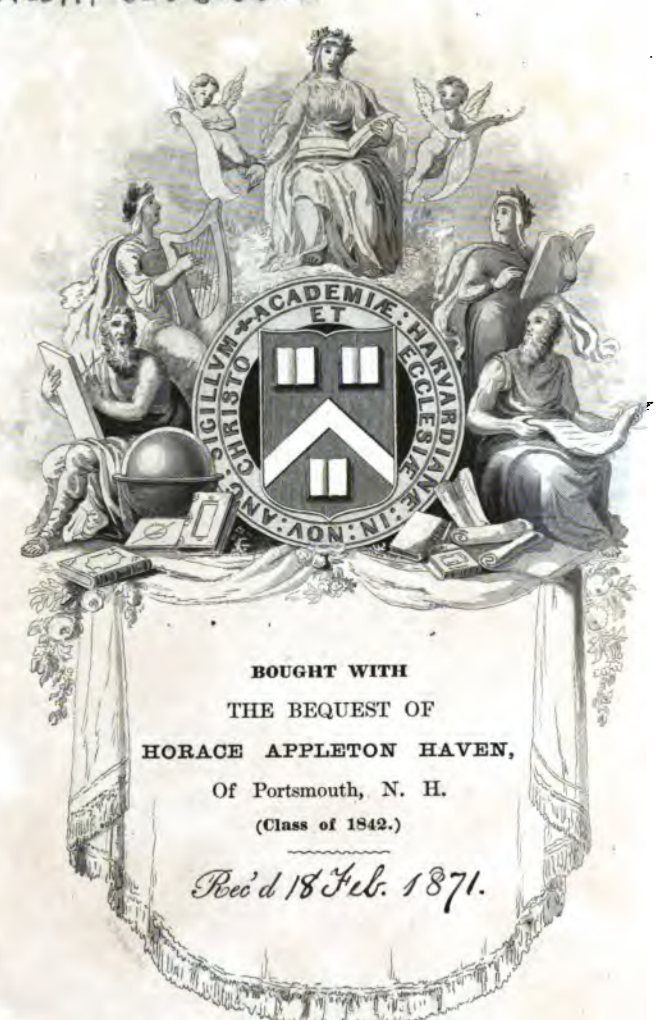
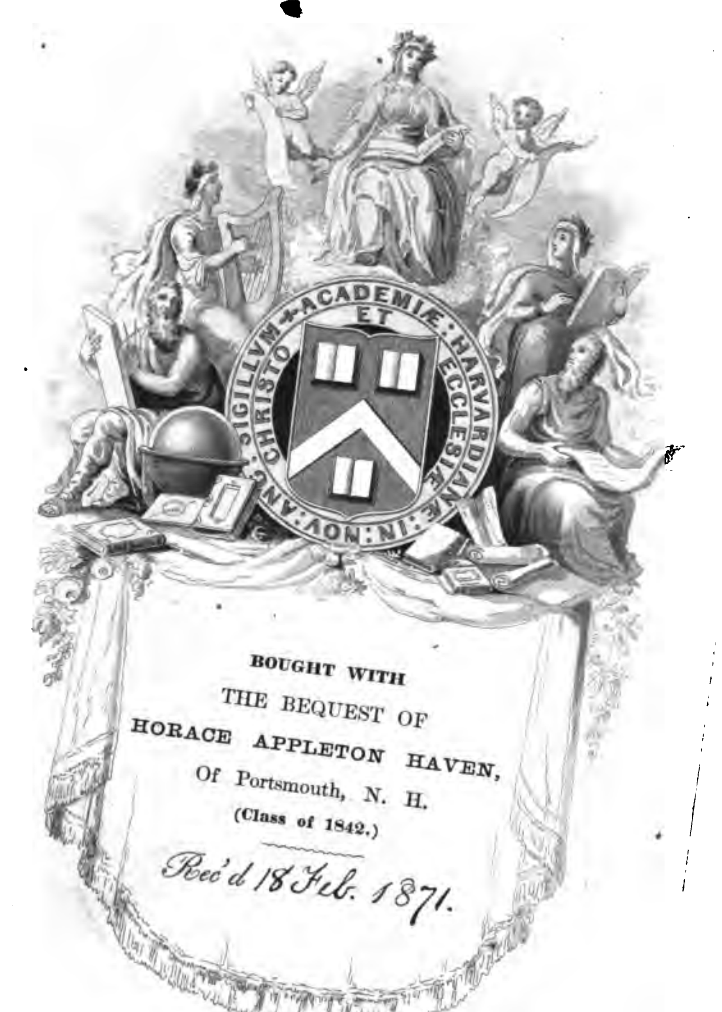



SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG: CHRISTO ET ECCLESIÆ


SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ



Elemente

der

analytischen Geometrie

der

Ebene

von

Ferdinand

F. Joachimsthal.

Mit acht Figurentafeln.

Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1863.

Vorrede des Herausgebers.

Ferdinand Joachimsthal, Professor an der Universität Breslau, wurde am 5. April 1861 durch einen frühzeitigen Tod mitten aus den Erfolgen seiner mathematischen Untersuchungen und seiner segensreichen Lehrthätigkeit fortgerissen. Auch war es ihm nicht vergönnt, die Ausarbeitung des vorliegenden Lehrbuchs, welchem er die Mussestunden vieler Jahre mit Vorliebe gewidmet hatte, vollständig zu Ende zu führen. Doch fanden sich glücklicherweise ausser einem vom Verstorbenen selbst als druckfertig bezeichneten Manuscript in den hinterlassenen Papieren noch weitere Ausführungen und Andeutungen vor, auf Grund deren ich es unternehmen konnte, dieses Lieblingswerk meines hochverehrten Lehrers

herauszugeben, ein Werk, welches durch die Klarheit der Darstellung und durch die sorgfältige Berücksichtigung der dem Anfänger entgegentretenden Schwierigkeiten seiner Bestimmung, als Leitfaden zur Einführung in die analytische Geometrie zu dienen, in vorzüglichem Maasse entspricht, und welches zugleich durch die Eigenthümlichkeit der Methode auch auf den mit dem Gegenstande völlig vertrauten Leser in hohem Grade anregend wirkt. In dieser Beziehung möchte namentlich die fast durchgängige Anwendung schiefwinkliger Coordinaten hervorzuheben sein, bei welcher die Verbindung von Einfachheit der Rechnung und Allgemeinheit der Schlüsse in seltener Weise erreicht ist.

Es kann als sicher angenommen werden, dass schon zu der Zeit, als Jacobi noch lebte, also bereits vor dem Jahre 1851, der erste Gedanke, die Elemente der Geometrie zu bearbeiten, in Joachimsthal entstanden war. Eine bezügliche Aufforderung Jacobi's hat diesen Gedanken wohl nicht erst hervorgerufen, sondern nur von Neuem angeregt und der Ausführung näher gebracht. Jacobi nämlich hatte schon seit längerer Zeit ab und zu an einem Lehrbuch geschrieben, welches zu einer elementaren analytischen Darstellung der von ihm in Vorlesungen an der Königsberger Uni-

versität oft behandelten Geometrie des Raumes bestimmt war*); er forderte nun Joachimsthal auf, ein Lehrbuch der Geometrie der Ebene zu schreiben, damit beide Werke zusammen das ganze Gebiet der Geometrie in ihren Elementen umfassten.

Der hierdurch von Neuem in Joachimsthal angeregte Gedanke hat dann freilich in ihm eine viel weitere Entwickelung genommen. Im Jahre 1855, als Joachimsthal die mathematische Professur an der Universität Halle bekleidete, hatte er bereits einen ersten Entwurf der Geometrie der Ebene nahezu vollendet, und er zeigte mir denselben bei Gelegenheit eines Besuches, den ich ihm damals machte. Aber dieser erste Entwurf genügte ihm später nicht; er ordnete den zu behandelnden Stoff nach einem neuen Plane an, änderte demgemäss die Reihenfolge der Kapitel — von denen z. B. das die Transversalentheorie enthaltende ursprünglich den Kegelschnitten vorausging — und unternahm auf diese Weise eine durchgreifende Umgestaltung des Werkes, welche leider vor der gänzlichen Vollendung durch seinen Tod unterbrochen wurde.

---

*) Dies Jacobi'sche Lehrbuch der Geometrie des Raumes ist leider auch unvollendet geblieben, das Manuscript desselben ist mir anvertraut worden, und ich hoffe seine Veröffentlichung dem Erscheinen des vorliegenden Joachimsthal'schen Werkes sehr bald folgen zu lassen.

Von dieser neuen Bearbeitung fand ich die ersten sieben Kapitel druckfertig vor; ich hatte daher nur den Schluss des Werkes im Sinne des Dahingeschiedenen zu ergänzen und hierfür folgende im Nachlass vorgefundene Papiere als Anhaltspunkte zu benutzen.

Erstens ergab ein kurzes Inhalts-Verzeichniss die vollständige Reihenfolge der Kapitel, wie sie Joachimsthal für die zweite Bearbeitung festgestellt hatte. Dieses Verzeichniss führt nicht nur die Geometrie der Ebene bis zu Ende, sondern geht auch zur Geometrie des Raumes über und zeigt also, dass Joachimsthal's Plan sich im Laufe der Jahre bedeutend erweitert hatte.

Zweitens lag mir der bereits erwähnte erste Entwurf des Werkes vor, welcher mit §. 94 abschliesst, und aus welchem der Text vom Anfange des achten bis gegen Ende des zehnten Kapitels wörtlich entnommen ist. Die in den sieben ersten Kapiteln durchgeführte neue Anordnung erforderte zwar einige Modificationen des Textes; jedoch habe ich es vorgezogen, denselben unverändert zu lassen und die Modificationen in Anmerkungen zu verweisen, welche als von mir herrührend mit dem Buchstaben H. unterzeichnet sind. Aus diesem ersten Entwurfe habe ich

überdies die drei auf den Seiten 13, 20 und 26 stehenden Anmerkungen genommen, deren Inhalt in der zweiten Bearbeitung fehlte.

Drittens fand sich ein Blatt, auf welchem Joachimsthal den im letzten Kapitel einzuhaltenden Gang in kurzen Umrissen angedeutet hat. Daraufhin habe ich den Versuch gemacht, dieses Kapitel auszuführen und damit das vorliegende Werk Joachimsthal's zu demjenigen Abschluss zu bringen, welcher von ihm selbst beabsichtigt und bei der Veröffentlichung nicht füglich zu entbehren war. Ich habe mich bei dieser Arbeit bemüht, so viel als möglich im Sinne Joachimsthal's zu verfahren, und namentlich im Sinne der oben erwähnten Andeutungen, welche mir die einzigen speciellen Anhaltspunkte gewährten, und welche ich deshalb hier wörtlich folgen lasse:

„Pole von Geraden, die durch einen Punkt gehen, „Tangentenmethode. Die Polare bewegt sich an „einem Kegelschnitt; Anwendung auf zwei Kreise. „— Durchschnitt zweier Kegelschnitte, gemein„schaftliche Sehnen, reelle, imaginäre. Reeller „Durchschnitt imaginärer conjugirter Geraden. Be„deutung der Punkte, welche als gemeinschaft„liche Durchschnittspunkte anzusehen sind. Be-

„trachtung von $U + \lambda V = 0$, Involution. $U = 0$,
„$U + \lambda pq = 0$, $U + \mu pr = 0$. — $U = 0$, $U + \lambda p^2 = 0$,
„$V + \mu q^2 = 0$. — $pq + \lambda rs = 0$. Pascal'scher Satz mit
„seinen Folgerungen; Brianchon'scher Satz."

Berlin, im März 1863.

Oswald Hermes.

Inhalts-Verzeichniss.

Erstes Kapitel.

Bestimmung der Lage von Punkten in einer Ebene. Principien der analytischen Geometrie.

Zweites Kapitel.

Die Linien erster Ordnung.

Drittes Kapitel.

D e r K r e i s.

Viertes Kapitel.
Die Ellipse.

Fünftes Kapitel.
Die Hyperbel.

Sechstes Kapitel.
Die Parabel. Scheitel- und Polargleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Siebentes Kapitel.

Transformation der Coordinaten.

Achtes Kapitel.

Discussion und Transformation der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung.

Neuntes Kapitel.

Fundamentalsätze aus der Theorie der Transversalen.

Zehntes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte. Combination eines Kegelschnittes und geradliniger Transversalen.

Elftes Kapitel.

Combination zweier und mehrerer Kegelschnitte.

Druckfehler.

Seite 23 Zeile 2 von oben lies $m' = y - lx$ statt $m' = y' - l'x'$.
- 59 - 6 - oben ist hinter welches einzuschieben dem Satze.
- 61 - 11 - oben lies und die zwei Geraden GF und GF' Radien-Vectoren statt und zwei Geraden GF und GF' zwei Radien-Vectoren.
- 73 - 15 - unten lies welche statt welcher.
- 79 - 10 - unten lies (Fig. 38*) statt (die fehlende Figur ist leicht zu ergänzen).
- 80 - 2 und 3 von oben ist statt P' zu setzen P_1.
- 86 - 6 von oben lies $p - r \cos v$ statt $- r \cos v$.
- 90 - 2 - oben lies derselben statt desselben.
- 105 - 17 - unten lies Gleichungen statt Gleichung.
- 145 - 4 - oben lies U statt (C).
- 147 - 4 - unten lies (4) statt (1).
- 172 - 11 - unten lies um einen statt um eine.
- 175 - 15 - unten lies Scheitelpunkte statt Schnittpunkte.

Erstes Kapitel.

Bestimmung der Lage von Punkten in einer Ebene. Principien der analytischen Geometrie.

§. 1. Bestimmung der Lage von Punkten einer Geraden. Nimmt man in einer unbegränzten Geraden (Fig. 1) einen Punkt O an, so ist die Lage eines jeden anderen Punktes α der Geraden bestimmt, wenn man erstens weiss, in welchem ihrer beiden durch O gebildeten Theile er sich befindet, und wenn man zweitens seine Entfernung von O kennt. Um beide Angaben zu vereinigen, unterscheidet man die beiden Hälften der Geraden, die eine als die positive und die andere als die negative, und setzt dem Werthe der Entfernung des Punktes α von O das Zeichen $+$ oder $-$ vor, der Seite entsprechend, in welcher er liegt; diese mit ihrem Zeichen versehene Entfernung des Punktes α von O heisst die Abscisse von α in Bezug auf den Anfangspunkt O.

Rechnen wir in Fig. 1 die positiven Abscissen von O aus nach rechts, und bedeuten die angegebenen Theile etwa Fusse, so ist die Abscisse von $\alpha = +2'$, von $\beta = +6'$, von $\gamma = -5'$, die Abscisse des Anfangspunktes O gleich Null.

§. 2. Verlegung des Anfangspunktes. Rechnet man die Abscissen nicht mehr von O, sondern von α, und zählt dabei die positiven Abscissen nach derselben Richtung wie früher, also in unserer Figur nach rechts, so werden die Abscissen aller Punkte $\beta, \gamma, \ldots$ um $O\alpha$ kleiner, wenn α, wie in Fig. 1, rechts von O liegt. Nennt man also die Abscissen von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ in Bezug auf O bezüglich $x, x', x'', \ldots$ so werden die Abscissen von $\beta, \gamma, \ldots$ in Bezug auf α resp. gleich:

$$(1) \quad x' - O\alpha, \quad x'' - O\alpha, \ldots$$

wofür man auch, weil $O\alpha = x$, schreiben kann:

$$(2) \quad x' - x, \quad x'' - x, \; ..$$

Liegt aber der neue Anfangspunkt α, wie in Fig. 2, links von O, so werden die Abscissen von β, γ, .. in Bezug auf α um $O\alpha$ grösser als in Bezug auf O, also bezüglich gleich:

$$(3) \quad x' + O\alpha, \quad x'' + O\alpha, \; ..$$

Die Abscisse x von α in Bezug auf O ist aber jetzt gleich $-O\alpha$, also $O\alpha = -x$, setzt man diesen Werth in die Reihe von (3) ein, so erhält man dieselben Grössen wie in (2); wir haben demnach den Satz:

Sind x, x', x'', .. die Abscissen der Punkte α, β, γ, .. einer Geraden in Bezug auf den Anfangspunkt O, so sind die Abscissen der Punkte β, γ, .. in Bezug auf α bezüglich gleich $x' - x$, $x'' - x$, .., vorausgesetzt, dass von O und von α aus die positiven Abscissen nach derselben Richtung gezählt werden.

§. 3. Folgerungen. Hieraus folgt weiter, dass die Differenzen $x' - x$, $x'' - x$ gleiches Zeichen haben, wenn β und γ auf derselben Seite von α liegen, entgegengesetztes im anderen Falle. Da ausserdem der Zahlenwerth der Differenzen $x' - x$ und $x'' - x$ die Längen der Strecken $\beta\alpha$, $\gamma\alpha$ ausdrückt, so hat man:

$$(1) \quad \frac{x' - x}{x'' - x} = \pm \frac{\beta\alpha}{\gamma\alpha},$$

wo das obere (untere) Vorzeichen gilt, wenn α ausserhalb (innerhalb) der Strecke $\beta\gamma$ liegt.

Ist z. B. α die Mitte von $\beta\gamma$, so muss das untere Vorzeichen genommen werden, und weil $\beta\alpha = \gamma\alpha$ ist, so hat man:

$$\frac{x' - x}{x'' - x} = -1,$$

woraus:
$$x' - x = -x'' + x,$$

oder:
$$(2) \quad x = \frac{x' + x''}{2}.$$

§. 4. Bestimmung der Lage von Punkten einer Ebene. Um die gegenseitige Lage der Punkte einer Ebene zu bestimmen, zieht man durch einen festen Punkt O derselben zwei unbegränzte Gerade $l'Ol$, $m'Om$ (Fig. 3), welche die Ebene in vier unendliche Theile zerlegen; man nennt die eine der Geraden, z. B. $l'Ol$, die Abscissenaxe, die andere $m'Om$ die Ordinatenaxe, und unter-

scheidet in jeder eine positive und negative Hälfte; in unserer Figur sollen lO und mO die positiven Halbaxen bedeuten. Zieht man nun von irgend einem Punkte a der Ebene Parallelen mit den Axen $a\alpha$ und $a\alpha'$, so wird die Lage von a durch die Grösse und das Vorzeichen der Axenabschnitte $O\alpha$ und $O\alpha'$ vollständig bestimmt. Die mit ihrem Vorzeichen versehenen Axenabschnitte $O\alpha$ und $O\alpha'$ heissen, der erste $O\alpha$ die Abscisse, der zweite $O\alpha'$ die Ordinate des Punktes a, beide zusammen die Coordinaten von a. Der Punkt O, dessen Coordinaten $= 0$ sind, heisst der Anfangspunkt der Coordinaten.

Da die Abscissen verschiedener Punkte häufig durch x, x', x'', .., die zugehörigen Ordinaten durch y, y', y'', .. bezeichnet werden, so sagt man statt „Abscisse und Ordinate" auch „das x und y eines Punktes", und spricht demgemäss auch von einer x- und y-Axe.

In den vier durch Zahlen bezeichneten Theilen von Fig. 3 sind für einen Punkt a in 1 x und y positiv, für einen Punkt b in 2 y positiv, x negativ, für einen Punkt c in 3 sind x und y negativ, für einen Punkt d in 4 ist x positiv, y negativ.

Es mag erinnert werden, dass zur Bestimmung der Coordinaten eines Punktes, z. B. von c, nur eine der Parallelen $c\gamma$ und $c\gamma'$ gezogen zu werden braucht, weil $O\gamma = c\gamma'$, $O\gamma' = c\gamma$ ist; man kann deshalb auch die mit den richtigen Zeichen versehenen Werthe von $c\gamma'$ und $c\gamma$ als Abscisse und Ordinate ansehen. Man sieht hiernach, dass alle Punkte einer Geraden, die der Abscissenaxe parallel ist, dieselbe Ordinate haben; für die Punkte der Abscissenaxe selbst ist die Ordinate $= 0$. Eben so haben die Punkte einer Parallelen zur Ordinatenaxe gleiche Abscisse, für die Punkte der Ordinatenaxe selbst ist die Abscisse $= 0$. So haben namentlich die Fusspunkte der Parallelen α, β, γ, δ die Ordinate $= 0$, und dieselben Abscissen wie resp. a, b, c, d; dagegen die Fusspunkte α', β', γ', δ' die Abscisse $= 0$, und dieselben Ordinaten wie resp. a, b, c, d.

Ist der Winkel zwischen den Axen ein rechter, so nennt man die Coordinaten rechtwinklige, sonst schiefwinklige, beide mit gemeinschaftlichem Namen Parallel-Coordinaten.

§. 5. Projectionen. Zieht man von einer Anzahl von Punkten a, b, c, d (Fig. 3) in beliebiger Richtung Parallelen, welche eine gegebene Gerade ll' in α, β, γ, δ treffen, so nennt man diese letzteren Punkte die Projectionen der ersteren, und zwar die recht-

winkligen oder schiefwinkligen, je nachdem die Parallelen auf ll' senkrecht stehen oder nicht; die Parallelen selbst heissen die Projectionsstrahlen.

Die in §. 4 erläuterte Methode, um die Lage von Punkten a, b, c, d, .. zu bestimmen, besteht demnach darin, dass man diese Punkte auf zwei sich schneidende Gerade ll' und mm' projicirt, die Projectionsstrahlen bezüglich mm' und ll' parallel annimmt und die Lage der Projectionen nach §. 1 angiebt; oder auch, dass man die Punkte a, b, c, d, .. nur auf eine Gerade projicirt, und ausser der Lage der Projectionen α, β, γ, δ, .. die Länge der Projectionsstrahlen $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$,.. angiebt, mit dem $+$ Zeichen versehen für Punkte auf der einen Seite von ll' (in Fig. 3 der oberen), mit dem $-$ Zeichen auf der anderen.

Es lassen sich noch unzählig viele andere Methoden angeben, um die Lage von Punkten in einer Ebene zu bestimmen; eine derselben wird weiter unten (§. 7, Zus.) angeführt werden.

§. 6. Verlegung des Anfangspunktes; Folgerungen. Die Resultate aus §. 2 und §. 3 lassen sich ohne Mühe auf Punkte übertragen, die in einer Ebene beliebig liegen.

Es seien x, y die Coordinaten eines Punktes a (Fig. 4), x', y' die von b. Denkt man sich durch a ein neues Coordinatensystem gelegt, dessen positive Halbaxen aX, aY denen des ersten Systemes parallel und gleich (d. h. nach derselben Seite hin) gerichtet sind, so sind die neuen Coordinaten von b gleich $x'-x$ und $y'-y$.

In der That, lässt man zuerst die Abscissenaxe ungeändert und verschiebt die Ordinatenaxe parallel, bis sie durch a geht, so ändert sich die Ordinate von b nicht, und die Abscisse von b (oder von β) wird $= x'-x$ (§. 2); verschiebt man nun auch die Abscissenaxe, bis sie durch a geht, so erhält man in ähnlicher Weise die neue Ordinate $= y'-y$.

Zieht man ferner von den Punkten a, b, c einer Geraden, deren Coordinaten x, y; x', y'; x'', y'' sein mögen (Fig. 5), die Ordinaten $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, so haben α, β, γ dieselben Abscissen x, x', x'', und dieselbe Reihenfolge wie a, b, c, d. h. a liegt ausserhalb (innerhalb) bc, wenn α ausserhalb (innerhalb) $\beta\gamma$ liegt; nach einem bekannten geometrischen Satze ist ausserdem:

$$\frac{ba}{ca} = \frac{\beta\alpha}{\gamma\alpha}.$$

Für die Punkte α, β, γ hatten wir in §. 3 $\frac{x'-x}{x''-x} = \pm\frac{\beta\alpha}{\gamma\alpha}$, also können wir auch schreiben:

$$(1)\quad \frac{x'-x}{x''-x} = \pm\frac{ba}{ca},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem a ausserhalb oder innerhalb der Strecke bc liegt. Eben so findet man, wenn a, b, c durch Parallelen zur Abscissenaxe auf die Ordinatenaxe projicirt werden:

$$(2)\quad \frac{y'-y}{y''-y} = \pm\frac{ba}{ca};$$

wir haben also den Satz:

Liegen die Punkte (x, y), (x', y'), (x'', y'')*) in einer Geraden, so findet die Gleichung statt:

$$(3)\quad \frac{x'-x}{x''-x} = \frac{y'-y}{y''-y}.$$

Umgekehrt, findet die Gleichung (3) statt, so liegen die 3 Punkte in einer Geraden. Denn wenn eine durch (x'', y'') oder c (Fig. 5) mit der Ordinatenaxe parallele Linie $c\gamma$ die durch a und b gezogene Gerade in einem Punkte c' trifft, dessen Abscisse also x'' ist, die Ordinate dagegen $= y'''$, so muss, weil a, b, c' in einer Geraden liegen, die Gleichung stattfinden:

$$\frac{x'-x}{x''-x} = \frac{y'-y}{y'''-y},$$

aus welcher durch Vergleichung mit (3) folgt $y''-y = y'''-y$ oder $y'' = y'''$, d. h. c und c' haben dieselben Coordinaten oder fallen zusammen. Schafft man in (3) die Nenner fort, so verwandelt sich die Gleichung in:

$$(4)\quad x'y''-x''y'+x''y-xy''+xy'-x'y = 0.$$

Ist a oder (x, y) die Mitte von bc, so werden die rechten Seiten von (1) und (2) gleich -1 (vgl. §. 3), woraus:

$$(5)\quad x = \frac{x'+x''}{2},\quad y = \frac{y'+y''}{2}.$$

---

*) Der Punkt, dessen Abscisse $= x$, dessen Ordinate $= y$ ist, wird der Punkt (x, y) genannt.

Die nachfolgenden Aufgaben mögen der Einfachheit halber zuerst für rechtwinklige Axen gelöst werden.

§. 7. Aufgabe. Aus den rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes (x, y) seine Entfernung r vom Anfangspunkte und den Winkel v zu bestimmen, den die Abscissenaxe mit r bildet.

Auflösung. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden, verstehen wir unter v den Winkel, den die positive x-Axe beschreiben muss, um von ihrer ursprünglichen Lage ausgehend und nach der $+y$-Axe zu sich drehend, in die Lage von r zu gelangen. Demnach ist (Fig. 6) für den Punkt a des ersten Quadranten v gleich dem Winkel $aO\alpha$, für a' gleich $180^\circ - a'O\alpha'$, für a'' gleich $180^\circ + a''O\alpha''$, für a''' gleich $360^\circ - a'''O\alpha'''$.

Nun ist für den Punkt a, $x = O\alpha$, $y = a\alpha$, $r = Oa$, $v = aO\alpha$, also:

$$(1) \quad x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

von welchen drei Gleichungen die letzte, weil $\cos v^2 + \sin v^2 = 1$, eine Folge der beiden übrigen ist.

Hieraus ergiebt sich umgekehrt:

$$(2) \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos v = \frac{x}{r}, \quad \sin v = \frac{y}{r}.$$

Diese Formeln gelten allgemein, denn man hat:

für a' im 2ten Quadranten:

$$x = -O\alpha', \quad y = a'\alpha', \quad r = Oa', \quad v = 180^\circ - a'O\alpha',$$

also:
$$\cos v = -\cos a'O\alpha' = -\frac{O\alpha'}{Oa'} = \frac{x}{r},$$
$$\sin v = \sin a'O\alpha' = \frac{a'\alpha'}{Oa'} = \frac{y}{r};$$

für a'' im 3ten Quadranten:

$$x = -O\alpha'', \quad y = -a''\alpha'', \quad r = Oa'', \quad v = 180^\circ + a''O\alpha'',$$

also:
$$\cos v = -\cos a''O\alpha'' = -\frac{O\alpha''}{Oa''} = \frac{x}{r},$$
$$\sin v = -\sin a''O\alpha'' = -\frac{a''\alpha''}{Oa''} = \frac{y}{r};$$

für a''' im 4ten Quadranten:

$$x = O\alpha''', \quad y = -a'''\alpha''', \quad r = Oa''', \quad v = 360^\circ - a'''O\alpha''',$$

also: $$\cos v = \cos a'''O\alpha''' = \frac{O\alpha'''}{Oa'''} = \frac{x}{r},$$
$$\sin v = -\sin a'''O\alpha''' = -\frac{a'''\alpha'''}{Oa'''} = \frac{y}{r}.$$

Zusatz. Die Grössen r und v, welche ebenfalls die Lage eines Punktes a gegen das Axensystem bestimmen, heissen die Polarcoordinaten von a, und r der Radius Vector; r ist immer positiv, den Winkel v kann man, wenn er in umgekehrter Richtung, als eben festgesetzt ist, gezählt wird, auch negativ annehmen; so ist z. B. das v des Punktes $a''' = 300^0$ oder $= -60^0$; weil ferner der Radius Vector nach jeder Umdrehung von 360^0 in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so kann man dem Winkel v beliebige Vielfache von 360^0 hinzufügen. — Die Formeln (1) geben die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes durch seine Polarcoordinaten, die Formeln (2) lösen die umgekehrte Aufgabe.

§. 8. Aufgabe. Aus den rechtwinkligen Coordinaten zweier Punkte a, b die Entfernung ab und die Neigung dieser Geraden gegen die Abscissenaxe zu bestimmen.

Man denke sich (Fig. 7) durch a ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen positive Halbaxen aX, aY mit denen des alten Systems Ox und Oy parallel und gleich gerichtet sind. Setzt man die Coordinaten von b in Bezug auf dieses neue System $= X$ und Y, die Entfernung $ab = R$, und den Winkel zwischen aX und ab, der eben so gezählt wird, wie in §. 7 der Winkel v, gleich w, so hat man nach §. 7:

$$R = +\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos w = \frac{X}{R}, \quad \sin w = \frac{Y}{R};$$

nach §. 6 sind:

$$X = x' - x, \quad Y = y' - y,$$

also:

$$(1) \quad R = +\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}, \ \cos w = \frac{x'-x}{R}, \ \sin w = \frac{y'-y}{R}.$$

Erklärung. Wenn eine Gerade ab um einen ihrer Endpunkte a sich in derselben Richtung dreht, in welcher die positive x-Axe um den Anfangspunkt O sich drehen muss, damit sie den ersten Quadranten überstreichend nach der positiven y-Axe gelangt, so soll die Drehung von ab um a die positive heissen, im entgegengesetzten Falle die negative.

§. 9. Aufgabe. Aus den rechtwinkligen Coordinaten der Ecken eines Dreiecks den Inhalt desselben zu bestimmen.

I. Fall. Die eine Ecke des Dreiecks sei der Anfangspunkt O (Fig. 8); die rechtwinkligen Coordinaten von $b = x', y'$, von $c = x'', y''$; die Polarcoordinaten beider Punkte bezüglich r', v' und r'', v'', so dass nach §. 7:

$$(1) \quad \cos v' = \frac{x'}{r'}, \quad \sin v' = \frac{y'}{r'}, \quad \cos v'' = \frac{x''}{r''}, \quad \sin v'' = \frac{y''}{r''}.$$

Muss Ob im positiven Sinne sich um O drehen, wenn es die Fläche des Dreiecks Obc beschreibt (wie in Fig. 8, während in Fig. (8*) das Gegentheil stattfindet), so ist der Dreieckswinkel $cOb = v'' - v'$; wäre etwa v'' kleiner als v', was möglich ist, wenn b im 4ten und c im 1sten Quadranten liegt, so kann man zu v'' noch 360° addiren. Der Inhalt $\varDelta$ des Dreiecks ist also:

$$\varDelta = \tfrac{1}{2} Ob \cdot Oc \sin(v'' - v') = \tfrac{1}{2} r'r'' (\cos v' \sin v'' - \cos v'' \sin v'),$$

oder durch Substitution der Werthe (1):

$$(2) \quad \varDelta = \tfrac{1}{2}(x'y'' - x''y').$$

Muss aber Ob im negativen Sinne sich drehen, um das Dreieck zu überstreichen (wie in Fig. (8*)), so hat man $\varDelta = \frac{1}{2} r'r'' \sin(v' - v'')$, also ist in (2) x', y' mit x'', y'' zu vertauschen und man erhält:

$$(3) \quad \varDelta = \tfrac{1}{2}(x''y' - x'y'') = -\tfrac{1}{2}(x'y'' - x''y').$$

II. Fall. Die Formeln (2) und (3) führen auch zur Berechnung des allgemeinen Falles, wenn die erste Dreiecksecke a (Fig. 9) ein beliebiger Punkt (x, y) ist, und nicht der Anfangspunkt. Die Punkte b und c würden, wenn man a zum Anfangspunkte eines parallel und gleich gerichteten Systemes wählte, die Coordinaten $x' - x$, $y' - y$ und $x'' - x$, $y'' - y$ haben (vgl. §. 6). Man erhält also den Inhalt von abc, indem man diese Werthe statt x', y' u. s. w. in (2) und (3) substituirt; oder:

der Inhalt $\varDelta$ des Dreiecks abc ist:

$$(4) \quad \varDelta = \pm \tfrac{1}{2}\{(x' - x)(y'' - y) - (x'' - x)(y' - y)\},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem ab im positiven oder negativen Sinne um a sich drehen muss, um das Dreieck abc zu beschreiben.

Zusatz. Die Formel (4) gestattet mehrere Umformungen durch Auflösung der Klammergrössen; man bekommt:

$$(5)\quad \Delta = \pm \tfrac{1}{2}\{xy' - x'y + x'y'' - x''y' + x''y - xy''\},$$
$$= \pm \tfrac{1}{2}\{x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - x''y'\},$$
$$= \pm \tfrac{1}{2}\{x(y' - y'') + x'(y'' - y) + x''(y - y')\},$$
$$= \pm \tfrac{1}{2}\{y(x'' - x') + y'(x - x'') + y''(x' - x)\}.$$

§. 10. Aufgabe. Aus den rechtwinkligen Coordinaten der Ecken eines Vielecks den Inhalt desselben zu bestimmen.

Es seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n), die n Ecken des Vielecks $a_1 a_2 \ldots a_n$ (Fig. 10); man nehme im Innern des Vielecks einen Punkt a mit den Coordinaten x, y, so sind die Inhalte der Dreiecke aa_1a_2, aa_2a_3, ... $aa_{n-1}a_n$, aa_na_1 bezüglich gleich (vgl. §. 9, zweite Formel in (5)):

$$\pm \tfrac{1}{2}\{x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1\},$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\{x(y_2 - y_3) - y(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2\},$$
$$\vdots$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\{x(y_{n-1} - y_n) - y(x_{n-1} - x_n) + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}\},$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\{x(y_n - y_1) - y(x_n - x_1) + x_ny_1 - x_1y_n\},$$

wo durchweg die oberen (unteren) Vorzeichen gelten, wenn die Aufeinanderfolge der Ecken a_1, a_2, ... a_n dem positiven (negativen) Drehungssinne entspricht, d. h. wenn die Drehungsrichtung von aa_1 nach a_2, a_3, ... a_n und zurück bis a_1 die positive (negative) ist. Addirt man diese Ausdrücke, so fallen sämmtliche Glieder, die mit x und y multiplicirt sind, fort, und man erhält:

(1) Inhalt des Vielecks:

$$= \pm \tfrac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots$$
$$\cdots + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n\}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich in die beiden folgenden umformen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\pm \tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + \cdots \\ &\qquad \cdots + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1})\}, \\ &= \pm \tfrac{1}{2}\{y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + \cdots \\ &\qquad \cdots + y_{n-1}(x_{n-2} - x_n) + y_n(x_{n-1} - x_1)\}. \end{aligned}$$

Die Wahl des Vorzeichens ist oben näher bestimmt worden.

Anmerk. Der für die Formeln (1) und (2) gegebene Beweis setzt voraus, dass man von einem Punkte a innerhalb des Vielecks nach sämmtlichen Ecken a_1, a_2, ... a_n Gerade ziehen kann, welche

die Seiten des Vielecks nicht schneiden. Die Richtigkeit der Formeln hängt jedoch von dieser Bedingung nicht ab, sie gelten vielmehr selbst für so complicirte Polygone wie Fig. (10*); den Nachweis dieser Behauptung, die für das Folgende ohne Interesse ist, übergehen wir.

§. 11. Der Uebung halber mögen die in §§. 7, 8, 9, 10 behandelten Probleme auch für schiefwinklige Coordinaten kurz erörtert werden, obgleich wir weiter unten (Kap. 7) noch einmal auf dieselben zurückkommen.

Es seien, wie in §. 7, r und v die Polarcoordinaten von a (Fig. 11), x und y die schiefwinkligen Coordinaten desselben Punktes, φ der Winkel zwischen den positiven Halbaxen; dann ist, weil a im positiven Quadranten liegt:

$$Oa = r,\ a\alpha = y,\ O\alpha = x,\ \text{Winkel } aO\alpha = v,\ Oa\alpha = \varphi - v,$$

und demnach:

$$(1)\quad \frac{y}{r} = \frac{\sin v}{\sin \varphi},\qquad \frac{x}{r} = \frac{\sin(\varphi - v)}{\sin\varphi}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{x + y\cos\varphi}{r} = \frac{\sin(\varphi - v) + \sin v \cos\varphi}{\sin\varphi} = \cos v,$$

oder:

$$(2)\quad r\cos v = x + y\cos\varphi \quad \text{und:} \quad r\sin v = y\sin\varphi.$$

Quadrirt man beide Gleichungen und addirt sie, so erhält man:

$$(3)\quad r^2 = x^2 + 2xy\cos\varphi + y^2.$$

Dass die Formeln (1), (2) und (3) auch für jede andere Lage des Punktes a gelten, wird eben so bewiesen, wie in §. 7. Sind r', v' die Polarcoordinaten eines zweiten Punktes b, x', y' seine schiefwinkligen Coordinaten, und bildet eine Gerade, die durch a mit der $+x$-Axe gleich gerichtet gezogen ist, mit der Entfernung ab oder R im positiven Drehungssinne den Winkel w, so leitet man ähnlich, wie in §. 8, aus den Formeln (1), (2) und (3) die nachstehenden ab:

$$(4)\quad \frac{y' - y}{R} = \frac{\sin w}{\sin\varphi},\qquad \frac{x' - x}{R} = \frac{\sin(\varphi - w)}{\sin\varphi},$$

$$(5)\quad R\sin w = (y'-y)\sin\varphi,\quad R\cos w = (x'-x)+(y'-y)\cos\varphi,$$

$$(6)\quad R^2 = (x'-x)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\varphi + (y'-y)^2.$$

Unter den in §. 9 angegebenen Bedingungen ist, wenn die Bezeichnungen des §. 9 beibehalten werden, der doppelte Inhalt $2\varDelta$ des Dreiecks $Obc = r'r''\sin(v''-v')$:

$$= r''\sin v''\cdot r'\cos v' - r''\cos v''\cdot r'\sin v',$$

nun ist aber:

$$r'\cos v' = x' + y'\cos\varphi,\qquad r'\sin v' = y'\sin\varphi,$$
$$r''\cos v'' = x'' + y''\cos\varphi,\qquad r''\sin v'' = y''\sin\varphi,$$

also wird:

$$2\varDelta = (x'+y'\cos\varphi)y''\sin\varphi - (x''+y''\cos\varphi)y'\sin\varphi,$$

oder:
$$\varDelta = \tfrac{1}{2}(x'y''-y'x'')\sin\varphi.$$

Aus der Vergleichung dieses Ausdruckes mit (§. 9, 2) ergiebt sich, dass die Formeln für den Inhalt eines Polygons durch die schiefwinkligen Coordinaten seiner Ecken von den in §. 10 gegebenen Ausdrücken sich nur durch den neu hinzutretenden Factor $\sin\varphi$ unterscheiden.

§. 12. Graphische Darstellung der reellen Lösungen einer Gleichung zwischen zwei Unbekannten. — Ehe wir die eigenthümlichen Methoden der analytischen Geometrie erläutern, müssen wir einige algebraische Betrachtungen ins Gedächtniss zurückrufen.

Ist eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten x und y gegeben, so nennt man solche Werthe von x und y zusammengehörige, welche die vorgelegte Gleichung befriedigen, und jedes zusammengehörige Werthepaar eine Lösung der Gleichung. Jede Gleichung zwischen x und y hat unzählig viele Lösungen, denn man kann einer der Unbekannten einen beliebigen Werth beilegen und dann die Gleichung nach der anderen Unbekannten auflösen. Auf diese Weise sind von der Gleichung:

$$(a)\quad 3x - 2y + 5 = 0$$

die Lösungen:

$$(A)\quad \begin{array}{l} x = -2,\ -1,\ \ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5, \\ y = -\tfrac{1}{2},\ +1,\ +2\tfrac{1}{2},\ +4,\ +5\tfrac{1}{2},\ +7,\ +8\tfrac{1}{2},\ +10, \end{array}$$

und von der Gleichung:

$$\text{(b)}\quad 2y^3 - x^4 - 5 = 0$$

die Lösungen:

$$\text{(B)}\quad \begin{array}{llllllllll} x = & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ y = & 3{,}50, & 2{,}19, & 1{,}44, & 1{,}36, & 1{,}44, & 2{,}19, & 3{,}50, & 5{,}07, & 6{,}80, \end{array}$$

berechnet worden. Wenn, wie in den angegebenen Beispielen, x und y reelle Werthe haben, so heisst die Lösung eine reelle, im entgegengesetzten Falle eine imaginäre; so ist z. B. $x = \sqrt[4]{-3}$, $y = 1$ eine imaginäre Lösung von (b).

Was man in der Algebra die Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten nennt, besteht also nach dem Vorhergehenden darin, unter den unzählig vielen Lösungen beider Gleichungen die ihnen gemeinschaftlichen zu finden. Sind drei Gleichungen von der Art, dass eine jede als Folgerung aus den beiden andern angesehen werden kann, z. B. $W = 0$, $W_1 = 0$, $W + W_1 = 0$, so genügt jede gemeinschaftliche Lösung von zweien derselben auch der dritten.

Hat man nun ein beliebiges recht- oder schiefwinkliges Coordinatensystem, so wie eine willkührliche Längeneinheit angenommen, so kann man jedes reelle Werthepaar von x und y durch einen Punkt darstellen, dessen Abscisse und Ordinate bezüglich den Werthen von x und y gleich sind. So repräsentirt nach der auf der Abscissenaxe aufgetragenen Eintheilung in Fig. 12 der Punkt a das Werthepaar $x = 4$, $y = 8\frac{1}{2}$, in Fig. 13 der Punkt b das Werthepaar $x = -3$, $y = +3{,}50$, der Punkt b' das Werthepaar $x = +3$, $y = +3{,}50$. Nach diesem Principe sind in Fig. 12 die Lösungen (A) der Gleichung (a), in Fig. 13 die Lösungen (B) von (b) dargestellt worden. Denkt man sich aber nicht nur für die ganzzahligen Werthe von x, sondern für alle Werthe von x, zu denen reelle Werthe von y gehören, y berechnet und diese Lösungen auf die angegebene Weise construirt, so erhält man nicht mehr eine Anzahl getrennter Punkte, sondern eine stetige Reihenfolge derselben; diese bilden für Gleichung (a), wie sich aus Fig. 12 schon vermuthen lässt und später bewiesen werden soll, eine gerade Linie, für Gleichung (b) eine complicirtere Curve, deren Gestalt durch die Punkte in Fig. 13 hinlänglich angedeutet ist und durch Berechnung dazwischen liegender Punkte beliebig genau gemacht werden kann.

Auf dieselbe Weise entspricht im Allgemeinen jeder Gleichung

zwischen x und y eine Curve, deren Punkte die Gesammtheit aller reellen Lösungen der Gleichung darstellen*).

§. 13. Darstellung der Curven durch Gleichungen. Umgekehrt, sind in einer Ebene zwei Coordinatenaxen und eine Curve gegeben, deren sämmtliche Punkte demselben mathematischen Gesetze unterworfen sind, so wird man eine Gleichung zwischen x und y aufstellen können, der die Coordinaten sämmtlicher Punkte der Curve genügen; denn da zu einer Abscisse $O\beta$ (Fig. 14) ein oder mehrere bestimmte Curvenpunkte b, b' gehören, so muss das Gesetz der Curve es gestatten, aus der Abscisse x die Ordinaten dieser Punkte zu berechnen; d. h. es muss zwischen den zusammengehörigen Coordinaten aller Punkte eine Gleichung stattfinden; diese nennt man die Gleichung der Curve.

Zwei Beispiele mögen das Gesagte erläutern, wobei der Einfachheit halber rechtwinklige Coordinaten gebraucht werden sollen.

Zuerst werde die Gleichung der unbegränzten Geraden aufgestellt, welche den Winkel zwischen den positiven Halbaxen halbirt (Fig. 15). Für den Punkt l im ersten Quadranten ist $Om = x$, $lm = y$, und da das Dreieck Olm gleichschenklig ist, also $Om = lm$, ist $x = y$. Für den Punkt l' im dritten Quadranten ist $x = -Om'$, $y = -l'm'$, und weil $Om' = l'm'$, auch hier $x = y$; also ist für alle Punkte der Geraden $x = y$; und umgekehrt ergiebt sich, dass nur Punkte jener Geraden der Gleichung $x = y$ genügen.

Wir wollen zweitens die Gleichung des Kreises aufstellen, der mit dem Radius a um den Anfangspunkt O der Coordinaten beschrieben ist. Fällen wir von einem Punkte p (Fig. 15) das Loth pq, so ist für ihn $x = Oq$, $y = pq$ und ausserdem $Op = a$, also wegen des rechtwinkligen Dreiecks Opq, $x^2 + y^2 = a^2$. Diese Gleichung gilt nicht nur für die im ersten Quadranten des Kreisumfanges gelegenen Punkte, sondern für alle Punkte der Peripherie

---

*) Einzelne Fälle bilden jedoch Ausnahmen: es sind diejenigen, welche gar keine oder nur eine beschränkte Anzahl von reellen Lösungen zulassen. Zu der ersten Art gehört die Gleichung $x^2 + y^2 + 1 = 0$; welches Vorzeichen auch x und y haben mögen, x^2 und y^2 sind stets positiv und die Summe der drei positiven Grössen x^2, y^2, 1 kann nicht Null werden; ebensowenig wird die Gleichung durch die Werthe $x = 0$, $y = 0$ erfüllt. Aus ähnlichem Grunde hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ nur eine reelle Lösung $x = 0$, $y = 0$, und stellt demnach geometrisch nur einen Punkt dar, den Anfangspunkt der Coordinaten.

(§. 7, 2), und umgekehrt gilt sie ausschliesslich für die Punkte des mit a um den Punkt O beschriebenen Kreises.

Dies vorausgeschickt, wird folgende Erklärung dem Leser verständlich sein.

Die analytische Geometrie ist eine Anwendung der Algebra auf die Geometrie; ihre eigenthümliche Methode besteht darin, Gerade oder Curven der Form und Lage nach als den geometrischen Ort aller Punkte zu definiren, deren Coordinaten einer gegebenen Gleichung genügen, und aus den Eigenschaften dieser Gleichung die Eigenschaften jener Geraden oder Curven abzuleiten.

§. 14. Durchschnittspunkte zweier Curven. Sind zwei Curven auf dasselbe Axensystem bezogen, wie in Fig. 15 die Gerade ll' und der Kreis, so werden die Coordinaten ihrer gemeinschaftlichen, d. h. ihrer Durchschnittspunkte, die gemeinschaftlichen reellen Lösungen ihrer Gleichungen sein. So genügen in Fig. 15 die Coordinaten von s und s' sowohl der Gleichung $y - x = 0$, weil dies alle Punkte von ll' thun, als auch der Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Sucht man die gemeinschaftlichen Lösungen beider Gleichungen, d. h. löst man sie nach x und y auf, so erhält man die beiden Lösungen $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, und $x = -a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = -a\sqrt{\frac{1}{2}}$, von denen die erste die Coordinaten von s, die andere die von s' liefert.

Haben die Gleichungen von drei und mehr Curven n Lösungen, die ihnen sämmtlich gemeinschaftlich sind, so gehen die Curven sämmtlich durch n bestimmte Punkte. Sind namentlich die Gleichungen dreier Curven $W = 0$, $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ der Art, dass eine jede als Folgerung aus den beiden anderen angesehen werden kann, so geht durch die Durchschnitte je zweier dieser Curven auch die dritte.

§. 15. Homogeneïtät der Gleichungen. Die Gleichungen, auf welche man in allen geometrischen Untersuchungen kommt, setzen voraus, dass sämmtliche Längen durch dieselbe Längeneinheit, sämmtliche Flächen durch die entsprechende Flächeneinheit ausgedrückt sind. So lange diese Einheit noch nicht bestimmt ist, oder was dasselbe sagen will, so lange nicht einer der Linien der Figur ein bestimmter Zahlenwerth beigelegt ist, müssen diese Gleichungen unabhängig von der willkührlichen Einheit stattfinden. Bezeichnen wir nun mit a, b, c, .. die Zahlenwerthe von Linien auf irgend eine willkührliche Einheit bezogen, so werden die Zahlen-

werthe dieser Linien, durch eine halb so grosse Einheit gemessen $2a$, $2b$, $2c$, .., durch eine dreimal so grosse $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$, .., überhaupt durch eine andere Einheit gemessen λa, λb, λc, .. sein, wo λ eine von den Verhältnissen der Einheiten abhängige Zahl ist. So lange die Gleichungen zwischen den Zahlenwerthen der Linien von der Wahl der Längeneinheit unabhängig sind, müssen sie also richtig bleiben, wenn überall λa, λb, λc, .. für a, b, c, .. gesetzt wird, unter λ eine beliebige Grösse verstanden. Sind z. B. a, b und c die Längen der Hypotenuse und der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, durch eine beliebige Einheit gemessen, so hat man $b^2+c^2-a^2=0$; setzt man λa, λb, λc für a, b und c, so erhält man $\lambda^2b^2+\lambda^2c^2-\lambda^2a^2=0$, welche Gleichung durch Division mit λ^2 auf die vorige wieder zurückkommt.

Man nennt ein einzelnes Glied (Monom), das von den Grössen a, b, c, .. abhängt, in Bezug auf dieselben vom $n$ten Grade, oder von der $n$ten Dimension (Ordnung), wenn es durch die erwähnte Substitution von λa, λb, λc, .. an die Stelle von a, b, c, .. den Factor λ^n erlangt. So sind die Monome:

$$a^3b, \quad \frac{a^2b}{c^2}, \quad \sqrt{\frac{c}{a^3}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}},$$

von den Dimensionen:

$$4, \quad 1, \quad -1, \quad -\frac{1}{6};$$

ist eins dieser Monome eine absolute Zahl, die keine der Liniengrössen a, b, c enthält, so sagt man, es habe die Dimension Null. Sind sämmtliche Glieder A, B, C, .. einer Gleichung:

$$A+B+C+D+E+\cdots+H=0,$$

von derselben Ordnung, etwa der $n$ten, oder ist die Gleichung, wie man sich ausdrückt, homogen, so werden durch die Substitution sämmtliche Monome mit λ^n multiplicirt, und da die rechte Seite $=0$ ist, so kommt man durch Division mit λ^n auf die ursprüngliche Gleichung wieder zurück. Umgekehrt:

Findet für eine beliebige Längeneinheit zwischen den Linien a, b, c, .. eine Gleichung von der Form:

$$(1) \quad A+B+C+D+\cdots+H=0$$

statt, so müssen die Monome A, B, C, D, .. H sämmtlich von derselben Dimension, oder die Gleichung muss homogen sein, voraus-

gesetzt, dass nicht zwischen einigen der Monome noch eine andere Gleichung derselben Form stattfindet.

Denn es seien die ersten Glieder A, B, C von derselben Dimension n, und etwa alle übrigen von der Dimension n', so wird durch die Substitution von λa, λb, λc, .. statt a, b, c, .. die Gleichung (1) in die folgende:

$$\lambda^n A + \lambda^n B + \lambda^n C + \lambda^{n'} D + \cdots + \lambda^{n'} H = 0,$$

oder in:

$$(2) \quad A + B + C + \lambda^{n'-n}(D + \cdots + H) = 0$$

übergehen. Da die Gleichung (2) ebenfalls, und zwar für jeden Werth von λ richtig sein soll, so findet man, indem man (1) von (2) abzieht:

$$(\lambda^{n'-n} - 1)(D + \cdots + H) = 0,$$

welche Gleichung für ein beliebiges λ nur richtig sein kann, wenn $D + \cdots + H = 0$ ist, d. h. die Gleichung (2) zerfällt in die beiden:

$$A + B + C = 0, \quad D + \cdots + H = 0;$$

da aber nach der Voraussetzung zwischen den Monomen $A, B, \ldots H$ nur die eine Gleichung (1) stattfindet, so ist die Annahme, dass zwei Gruppen von Gliedern in (1) vorkommen, von denen einige von der $n$ten, die andern von der n'ten Dimension sind, unstatthaft.

Eben so beweist man, dass in (1) auch nicht drei oder mehr Gruppen von Gliedern vorkommen können, die von verschiedener Dimension sind; die Gleichung (1) muss also homogen sein.

Die eben auseinandergesetzte Bedingung der Homogenëität giebt ein Mittel zur Controle der Rechnung; wenn aber die Zahlenwerthe der Linien sich nicht mehr auf eine beliebige, sondern auf eine ganz bestimmte Einheit beziehen, so kann man auf Gleichungen kommen, welche nicht mehr homogen sind. Sind z. B. y und x die Coordinaten eines Punktes der Curve in Fig. 13, durch Oh als Längeneinheit gemessen, so findet zwischen ihnen die nicht homogene Gleichung statt (§. 12, b) $2y^3 - x^4 - 5 = 0$, deren drei Glieder $2y^3$, x^4, 5 bezüglich von der 3ten, 4ten und 0ten Dimension sind; man kann die Homogenëität jedoch wieder herstellen. Nennt man die Länge von Oh und die der Coordinaten auf eine beliebige Einheit bezogen resp. a, X und Y, so sind die vorhin mit x

und y bezeichneten Grössen jetzt $\frac{X}{a}$, $\frac{Y}{a}$; die Gleichung der Curve verwandelt sich also in:

$$2\frac{Y^3}{a^3} - \frac{X^4}{a^4} - 5 = 0, \quad \text{oder:} \quad 2aY^3 - X^4 - 5a^4 = 0,$$

und man erhält in beiden Formen homogene Gleichungen.

§. 16. Eintheilung der Curven. Man theilt die Curven in algebraische und transscendente; eine algebraische Curve ist eine solche, in deren Gleichung die Coordinaten x und y nur den Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Erhebung zu Potenzen mit rationalen Zahlenexponenten unterworfen sind; jede andere Curve heisst eine transscendente. Von den beiden durch:

$$(y^2 + ax)^{\frac{1}{3}} = \frac{x^3 - by^2}{c^2 + y^2}, \quad \frac{x}{a} = \log\frac{y}{b}$$

dargestellten Curven ist die erste eine algebraische, die zweite eine transscendente.

Die algebraischen Curven theilt man in Ordnungen; hat man in der Gleichung einer algebraischen Curve alle Nenner und Wurzelgrössen fortgeschafft, welche x und y enthalten, so sagt man, die Gleichung und die durch sie dargestellte Curve oder Linie sei von der $n$ten Ordnung oder vom $n$ten Grade, wenn das in Bezug auf x und y höchste Glied von der $n$ten Dimension ist. So ist die Curve $xy^2 - ax + by = 0$, wegen des Gliedes xy^2, von der dritten Ordnung; die durch die Gleichungen $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $xy - b = 0$ dargestellten Curven sind von der zweiten Ordnung.

Die Linien erster Ordnung sind sämmtlich durch die Gleichung:

$$ax + by + c = 0$$

dargestellt, wo a, b, c constante, d. h. von x und y unabhängige Grössen sind. Die Linien zweiter Ordnung können in ihrer Gleichung ausserdem noch in x^2, xy und y^2 multiplicirte Glieder enthalten, so dass ihre allgemeinste Gleichung ist:

$$dx^2 + exy + fy^2 + ax + by + c = 0.$$

Die allgemeinste Gleichung der Linien dritten Grades ist:

$$gx^3 + hx^2y + ixy^2 + ky^3 + dx^2 + exy + fy^2 + ax + by + c = 0.$$

In den folgenden Abschnitten werden wir uns mit den Linien der beiden ersten Grade beschäftigen.

Anmerkung. Eine Curve wird zuweilen durch eine Gleichung zwischen Polarcoordinaten definirt, d. h. durch eine Gleichung zwischen dem veränderlichen Radius Oa oder r (Fig. 16) und dem Winkel v, den r mit einer festen Geraden Ol bildet, durch welche Gleichung die Länge von r für jeden Werth des Winkels v sich berechnen lässt.

Zweites Kapitel.

Die Linien erster Ordnung.

§. 17. Lehrsatz. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Coordinaten einer Gleichung ersten Grades genügen, ist eine gerade Linie.

Beweis. Jede Gleichung ersten Grades (erster Ordnung) zwischen x und y lässt sich auf die Form bringen:

$$(1) \quad ax + by + c = 0,$$

wo a, b, c constante Grössen sind, die positiv, negativ oder auch zum Theil gleich Null sein können. Wir betrachten folgende Fälle:

I. Es sei $a = 0$; also (1) von der Form $by + c = 0$, woraus $y = -\frac{c}{b}$. Da b und c Constanten sind, so enthält der geometrische Ort alle Punkte mit gleicher Ordinate, d. h. er ist eine Parallele zur x-Axe; ist überdies $c = 0$, hat man also $by = 0$, oder $y = 0$, so stellt er die x-Axe selbst vor (§. 4).

II. Ebenso ergiebt sich für $b = 0$, dass $ax + c = 0$ eine Parallele zur y-Axe, so wie $x = 0$ die y-Axe selbst darstellt.

III. Es seien a und b von Null verschieden; man denke sich drei verschiedene Lösungen von (1) berechnet, wie es z. B. in §. 12 für die Gleichung (a) geschehen ist; es seien dieselben x, y; x', y' und x'', y''. Diese Lösungen müssen der Gleichung (1) genügen, also muss sein:

$$ax + by + c = 0, \quad ax' + by' + c = 0, \quad ax'' + by'' + c = 0.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten und dritten ab, so erhält man:

$$a(x'-x)+b(y'-y)=0, \quad a(x''-x)+b(y''-y)=0,$$

woraus:

$$\frac{y'-y}{x'-x}=-\frac{a}{b}, \quad \frac{y''-y}{x''-x}=-\frac{a}{b},$$

also:

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{y''-y}{x''-x};$$

dies ist aber (§. 6) die Bedingung, damit (x, y), (x', y'), (x'', y'') drei Punkte einer Geraden darstellen; irgend drei Punkte also, welche der Gleichung (1) genügen, liegen in einer Geraden, und da schon zwei Punkte eine Gerade vollkommen bestimmen, so ist hiermit der Lehrsatz bewiesen.

IV. Ist $c=0$, so genügt der Gleichung $ax+by=0$ die Lösung $x=0$, $y=0$; die Gleichung $ax+by=0$ stellt also eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade dar.

Wenn c nicht $=0$, so schneidet die Gerade (1) die Axen; es sei ξ die Abscisse des Durchschnittes mit der x-Axe (die Ordinate desselben ist natürlich $=0$) und η die Ordinate des Durchschnittes mit der y-Axe, dessen Abscisse $=0$, so müssen die Werthepaare $(\xi, 0)$, $(0, \eta)$ der Gleichung (1) genügen; es muss also sein:

$$a\xi+c=0, \quad b\eta+c=0,$$

woraus:

$$\xi=-\frac{c}{a}, \quad \eta=-\frac{c}{b}, \quad a=-\frac{c}{\xi}, \quad b=-\frac{c}{\eta}.$$

Setzt man diese Werthe von a und b in (1) ein, so erhält man:

$$(2) \quad \frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}=1.$$

Die Gleichung (2) enthält nur zwei Constanten ξ, η, während (1) scheinbar deren drei a, b, c enthält, allein da man mit einer derselben immer die Gleichung dividiren kann, so geht nur ihr Verhältniss in die Gleichung (1) ein. Löst man z. B. (1) nach y auf und schreibt:

$$-\frac{a}{b}=l, \quad -\frac{c}{b}=m,$$

so kommt:

$$(3)\quad y = lx + m,$$

welche häufig gebrauchte Gleichung nur zwei Constanten l und m enthält.

Anm. 1. Die Gleichungen $ax + by + c = 0$ und $y = lx + m$ sind, wenn b nicht $= 0$ ist, von gleicher Allgemeinheit; ist aber $b = 0$, so ist es unmöglich, den Grössen l und m solche endliche Werthe beizulegen, dass die Gleichung $y = lx + m$ dasselbe darstelle wie $ax + c = 0$; denn die eine Gleichung enthält die Grösse y, die andere enthält sie nicht. Dividirt man aber die Gleichung $y = lx + m$ durch l und setzt dann $\frac{m}{l} = k$, so kommt $\frac{y}{l} = x + k$; ist nun l unendlich gross, so wird $\frac{y}{l} = 0$, also kommt $x + k = 0$. Wir können demnach sagen: damit $y = lx + m$ dasselbe bedeute wie die Gleichung $ax + c = 0$, müssen l und m unendliche Werthe haben, deren Verhältniss $\frac{m}{l}$ gleich dem endlichen Bruche $\frac{c}{a}$ sei.

Anm. 2. Die zwei Constanten, welche die Gleichung einer Geraden enthält, lassen sich so bestimmen, dass die dargestellte Gerade zwei gegebenen Bedingungen genügt; die folgenden Aufgaben werden dies erläutern *).

---

*) Man kann fragen, in welchem Falle die beiden Gleichungen:

$$(4)\quad ax + by + c = 0,\quad a'x + b'y + c' = 0$$

eine und dieselbe Gerade vorstellen. Wenn dies stattfindet, muss für ein beliebiges x aus beiden Gleichungen derselbe Werth des y folgen, d. h. es muss für ein beliebiges x:

$$-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$$

sein. Für $x = 0$ giebt dies $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$; lässt man diese Glieder fort, so kann nicht $\frac{a}{b}x = \frac{a'}{b'}x$ für jeden Werth des x sein, wenn nicht $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Die Bedingungen $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ lassen sich auch schreiben $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ und $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, oder $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$. Nennt man den Werth dieser glei-

§. 18. Aufgabe. Die Gleichung der Geraden zu finden, die durch zwei gegebene Punkte (x', y') und (x'', y'') geht.

Auflösung. Es handelt sich darum, zwei Grössen l und m so zu bestimmen, dass (x', y'), (x'', y'') Lösungen von:

$$(1)\quad y = lx + m$$

werden. Zu dem Ende muss sein $y' = lx' + m$, $y'' = lx'' + m$, woraus durch Subtraction hervorgeht:

$$y' - y'' = l(x' - x''), \quad \text{oder:} \quad l = \frac{y' - y''}{x' - x''}$$

und:
$$m = y' - lx' = y' - \frac{y' - y''}{x' - x''}\, x' = \frac{y''x' - y'x''}{x' - x''}.$$

Setzt man diese Werthe in (1) ein, so erhält man:

$$(2)\quad y = \frac{y' - y''}{x' - x''}\, x + \frac{y''x' - y'x''}{x' - x''},$$

oder:
$$(3)\quad y(x' - x'') - x(y' - y'') + y'x'' - y''x' = 0.$$

Statt dieser Gleichungen kann man auch schreiben:

$$(4)\quad y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'),$$

$$(5)\quad y - y'' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x'');$$

die Gleichungen (2), (3), (4), (5) sind nicht von einander verschieden, sondern einfache algebraische Umformungen, und hätten unmittelbar aus §. 6 abgeleitet werden können. Man überzeugt sich leicht, dass sie in der That befriedigt werden, wenn man x' und y' oder x'' und y'' statt x und y einsetzt.

Anm. 1. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Gleichung irgend einer durch $(x'\ y')$ gehenden Geraden die folgende ist:

$$y - y' = l(x - x').$$

---

chen Brüche λ, so ist:

$$a = \lambda a', \quad b = \lambda b', \quad c = \lambda c',$$

d. h. von den beiden Gleichungen (4) muss die eine durch Multiplication mit einem constanten Factor λ aus der anderen entstanden sein, wenn sie dieselbe Gerade vorstellen sollen. Obige Rechnungen setzen stillschweigend voraus, dass b und b' von Null verschieden sind; ist dies nicht der Fall, so bedarf der Beweis einer geringen Modification.

Anm. 2. In den Gleichungen (2) bis (5) bedeuten (x', y') (x'', y'') die Coordinaten zweier gegebenen Punkte, x und y die irgend eines Punktes der Geraden, man nennt deshalb zum Unterschied diese letzteren laufende Coordinaten.

§. 19. Aufgabe. Die Coordinaten des Durchschnittes der beiden Geraden:

$$(1) \quad ax + by + c = 0, \quad (2) \quad a'x + b'y + c' = 0$$

zu bestimmen:

Auflösung. Man findet dieselben (§. 14) durch Auflösung der Gleichungen (1) und (2):

$$(3) \quad x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - ba'}.$$

Anm. 1. Die Werthe (3) bleiben endlich, wenn $ab' - ba'$ von Null verschieden ist. Wenn aber:

$$(4) \quad ab' - ba' = 0, \quad \text{oder:} \quad (5) \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

so werden diese Werthe unendlich; die Geraden schneiden sich also dann im Endlichen nicht, oder sind parallel. Haben die Gleichungen die Form $y = lx + m$, $y = l'x + m'$, welche auch $lx - y + m = 0$ u. s. w. geschrieben werden können, so wird die Bedingung des Parallelismus:

$$(6) \quad l = l'.$$

Anm. 2. Geht die Gerade:

$$(7) \quad a''x + b''y + c'' = 0$$

durch den Durchschnitt von (1) und (2), so müssen die Werthe (3) der Gleichung (7) genügen; d. h. es muss sein:

$$a'' \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'} + b'' \frac{ca' - c'a}{ab' - ba'} + c'' = 0,$$

oder: (8) $ab'c'' - a'bc'' + a'b''c - a''b'c + a''bc' - ab''c' = 0$;

diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Geraden (1), (2), (7) durch einen Punkt gehen.

§. 20. Aufgabe. Die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Punkt (x', y') geht und der Geraden $y = lx + m$ parallel ist.

Auflösung. Es sei $y = l'x + m'$ die Gleichung der gesuchten Geraden, dann erfordert der Parallelismus mit $y = lx + m$,

dass $l' = l$ (§. 19, Form. 6); ferner muss $y' = l'x' + m'$ sein, also hat man $m' = y' - l'x' = y' - lx'$; die gesuchte Gleichung wird demnach $y = lx + y' - lx'$, oder:

$$y - y' = l(x - x').$$

Anm. Die Gleichung der Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht und mit $y = lx + m$ parallel ist, ist demnach $y = lx$.

Die folgenden Aufgaben gestalten sich für rechtwinklige Axen einfacher als für schiefwinklige, und sollen deshalb zuerst in Bezug auf ein rechtwinkliges System gelöst werden.

§. 21. Aufgabe. Die Gleichung einer Geraden in Bezug auf ein rechtwinkliges System zu bestimmen, welche durch den Punkt (x', y') geht, und mit der Abscissenaxe einen gegebenen Winkel macht.

Auflösung. Es sei w der Winkel zwischen der positiven Richtung der x-Axe, und der auf der positiven Seite der y liegenden Hälfte der Geraden (Fig. 17). Zieht man durch (x', y') oder a die Gerade aX parallel der $+x$-Axe, so ist die Grösse der positiven Drehung von aX nach $ab = w$ und von aX nach $ab' = 180^0 + w$. Demnach hat man, je nachdem x, y die Coordinaten von b oder b' sind:

für den Punkt b (vgl. §. 8): $x - x' = \overline{ab} \cos w$, $y - y' = \overline{ab} \sin w$,

„ „ „ b': $x - x' = \overline{ab'} \cos(180^0 + w) = -\overline{ab'} \cos w$,

$$y - y' = \overline{ab'} \sin(180^0 + w) = -\overline{ab'} \sin w,$$

also in beiden Fällen: $\dfrac{y - y'}{x - x'} = \operatorname{tang} w$,

die gesuchte Gleichung ist demnach:

$$(1) \quad y - y' = \operatorname{tang} w \, (x - x').$$

Liegt der Punkt (x', y') oder a auf der Ordinatenaxe, so ist $x' = 0$, und (1) verwandelt sich in:

$$(2) \quad y = \operatorname{tang} w \cdot x + y'.$$

Vergleicht man (2) mit der Gleichung $y = lx + m$, so ergiebt sich die Bedeutung der Constanten l und m bei einem rechtwinkligen Systeme; es ist nämlich l die Tangente des Winkels w, den die Richtung der positiven Abscissenaxe mit der oberen Hälfte den Geraden bildet, und m die Ordinate ihres Durchschnittes mit der y-Axe.

Man hat bekanntlich:

$$\cos w = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang} w^2}}, \quad \sin w = \pm \frac{\operatorname{tang} w}{\sqrt{1+\operatorname{tang} w^2}},$$

ist also: $\operatorname{tang} w = l,$

so kommt: $\cos w = \pm \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}, \quad \sin w = \pm \frac{l}{\sqrt{1+l^2}},$

das Vorzeichen muss für cosinus und sinus gleich und zwar so gewählt werden, dass $\sin w$ positiv ausfällt, weil w ein Winkel ist, der 180^0 nicht überschreitet.

§. 22. Aufgabe. Die Gleichungen zweier Geraden in rechtwinkligen Coordinaten seien $y = lx + m$, $y = l'x + m'$; den Winkel zu bestimmen, unter welchem sie sich schneiden.

Auflösung. Es seien w und w' die in §. 21 genau definirten Winkel, welche die Geraden mit der x-Axe bilden, also $\operatorname{tang} w = l$, $\operatorname{tang} w' = l'$. Es sei ferner wie in Fig. 18 $w > w'$, dann schliessen zwei durch den Anfangspunkt O mit den oberen Theilen der Geraden parallel gezogene Linien einen Winkel $w - w'$ ein, der dem Winkel u zwischen den Geraden gleich ist; also hat man:

$$(1) \quad \operatorname{tang} u = \operatorname{tang}(w - w') = \frac{\operatorname{tang} w - \operatorname{tang} w'}{1 + \operatorname{tang} w \operatorname{tang} w'} = \frac{l - l'}{1 + ll'}.$$

Wäre $w' > w$, so hätte man $\operatorname{tang} u = \operatorname{tang}(w' - w) = \frac{l' - l}{1 + ll'}$; die rechte Seite von (1) wäre in diesem Falle $= -\operatorname{tang} u$, oder $= \operatorname{tang} u'$, wenn u' der Nebenwinkel von u ist; daher ist sie unter allen Umständen die Tangente eines der Winkel, welche die Geraden bilden. Sind die Geraden parallel, so ist $u = 0$, also $\operatorname{tang} u = 0$, woraus $l = l'$ (§. 19, Anm. 1); stehen die Geraden auf einander senkrecht, so muss $\operatorname{tang} u$ unendlich werden, also ist dann:

$$(2) \quad 1 + ll' = 0.$$

Sind die Gleichungen der Geraden:

$$(3) \quad ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0,$$

so ist in (1) für l und l' bezüglich $-\frac{a}{b}$, $-\frac{a'}{b'}$ zu setzen,

also: $$(4) \quad \operatorname{tang} u = \frac{-\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}}{1 + \frac{aa'}{bb'}} = \frac{a'b - ab'}{aa' + bb'},$$

woraus die Bedingung des Parallelismus $a'b - ab' = 0$ (§. 19), und die der Perpendicularität:

$$(5) \quad aa' + bb' = 0 \text{ folgen.}$$

Anm. Um $\sin u$ und $\cos u$ zu berechnen, bilden wir zuvor $1 + \operatorname{tang} u^2$ (§. 21); man hat:

$$1 + \operatorname{tang} u^2 = \frac{(aa' + bb')^2 + (a'b - ab')^2}{(aa' + bb')^2};$$

nach einer häufig gebrauchten Transformationsformel, deren Richtigkeit sich leicht verificiren lässt, ist:

$$(6) \quad (aa' + bb')^2 + (a'b - ab')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2);$$

hieraus folgt:

$$(7) \quad \cos u = \pm \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad \sin u = \pm \frac{a'b - ab'}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

§. 23. Aufgabe. Die Coordinaten (x', y') eines Punktes und die Gleichung einer Geraden:

$$(1) \quad ax + by + c = 0$$

sind für ein rechtwinkliges System gegeben; man soll die Gleichung des von (x', y') auf (1) gefällten Lothes, den Fusspunkt und die Länge desselben bestimmen.

Auflösung. Es sei $y = lx + m$ oder $lx - y + m = 0$, die Gleichung der gesuchten Geraden; weil sie durch (x', y') geht, muss sein:

$$(2) \quad lx' - y' + m = 0,$$

und weil sie auf (1) senkrecht steht (§. 22, 5):

$$(3) \quad al - b = 0,$$

woraus: $l = \frac{b}{a}$, und: $m = y' - \frac{b}{a} x'$;

die Gleichung der Geraden ist also:

$$y = \frac{b}{a} x + y' - \frac{b}{a} x',$$

oder eleganter:

$$(4) \quad \frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b}.$$

Die Coordinaten des Fusspunktes ergeben sich durch Auflösung

der Gleichungen (1) und (4). Setzt man den Werth der beiden gleichen Brüche in (4) $= \varepsilon$, so kommt:

$$(5) \quad x = x' + a\varepsilon, \quad y = y' + b\varepsilon;$$

substituirt man diese Werthe in (1), so kommt:

$$ax' + by' + c + \varepsilon(a^2 + b^2) = 0.$$

woraus:
$$\varepsilon = -\frac{ax' + by' + c}{a^2 + b^2};$$

also werden zufolge (5) die Coordinaten des Fusspunktes:

$$(6) \quad x = x' - a\frac{ax' + by' + c}{a^2 + b^2}, \quad y = y' - b\frac{ax' + by' + c}{a^2 + b^2}.$$

Die Länge P des Lothes von (x', y') auf (1) gefällt, ist die Entfernung des Fusspunktes (x, y) und des Punktes (x', y'); also $P^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, nun ist $x - x' = a\varepsilon$, $y - y' = b\varepsilon$, woraus $P^2 = (a^2 + b^2)\varepsilon^2$, oder:

$$(7) \quad P = \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

wo das Vorzeichen der Wurzel als positiv anzunehmen ist*).

---

*) Die Formel (7) des §. 23 veranlasst uns eine Betrachtung hier einzuschalten, die öfters Anwendung findet.

Denkt man sich für sämmtliche Punkte einer Ebene den Werth von $ax + by + c$ berechnet, so wird derselbe für alle Punkte einer Geraden G verschwinden, während er für alle anderen Punkte der Ebene positiv oder negativ wird. Wir wollen nun nachweisen, dass die Gerade G die Punkte der Ebene, für welche das eine stattfindet, von denen trennt, für welche das Gegentheil eintritt. In der That, es sei h ein Punkt der Geraden G, x', y' seine Coordinaten. Denken wir uns durch h eine Parallele zur x-Axe, es sei (x'', y') ein Punkt k derselben, der natürlich mit h gleiche Ordinate hat. Ist nun, um etwas festzustellen, a positiv, so wird $ax'' + by' + c \gtrless ax' + by' + c$ sein, jenachdem $x'' \gtrless x'$ ist; da aber $ax' + by' + c = 0$, so ist $ax'' + by' + c$ positiv oder negativ, je nachdem der Punkt k der Parallelen von h aus auf der Seite der wachsenden oder abnehmenden x liegt. Diese Betrachtungen lassen sich für jeden Punkt h von G anstellen. Für sämmtliche Punkte der Ebene, die von G aus auf der Seite der wachsenden Abscissen liegen, wird $ax + by + c$ positiv, für G selbst gleich Null, für die anderen negativ. Ist a negativ, so bestimmt sich, um kurz zu sprechen, die positive und negative Region der Ebene

§. 24. Entwickelung einiger Formeln für schiefwinklige Coordinaten. Die in §§. 21—23 behandelten Aufgaben werden in Kap. 7 allgemein und symmetrisch für ein schiefwinkliges System gelöst werden, doch mögen theils der Uebung wegen, theils für den Gebrauch in den nächsten Abschnitten einige Formeln analog wie in den vorhergehenden §§. abgeleitet werden. — In dem Folgenden ist φ der Winkel zwischen den positiven Halbaxen.

Aus §. 11 Formel 4 ergiebt sich ähnlich wie in §. 21 die Gleichung der Geraden, die durch (x', y') geht und mit der x-Axe den in §. 21 genau definirten Winkel w bildet:

$$(1) \quad y - y' = \frac{\sin w}{\sin(\varphi - w)}(x - x').$$

Ist $x' = 0$, so wird diese Gleichung:

$$(2) \quad y = \frac{\sin w}{\sin(\varphi - w)} x + y';$$

demnach bedeutet in $y = lx + m$, m die Ordinate des Durchschnittes dieser Geraden mit der y-Axe, und zwischen l und w hat man die Gleichung:

$$(3) \quad l = \frac{\sin w}{\sin(\varphi - w)}.$$

Um w aus l zu bestimmen, schaffen wir in (3) den Nenner fort und entwickeln $\sin(\varphi - w)$; dies giebt:

$$l \sin\varphi \cos w - l \cos\varphi \sin w = \sin w,$$

oder:

$$l \sin\varphi \cos w = (1 + l\cos\varphi)\sin w,$$

woraus:

$$(4) \quad \operatorname{tang} w = \frac{l \sin\varphi}{1 + l\cos\varphi}.$$

Sind:

$$(5) \quad y = lx + m, \quad y = l'x + m'$$

zwei Gerade, für welche w, w' und u dieselbe Bedeutung haben wie in §. 22, so ist der Winkel u, den die Geraden bilden, durch die Gleichung gegeben:

---

gerade umgekehrt. Wir kommen auf diese Betrachtungen noch einmal zurück (§. 69).

Das Resultat (§. 23, 7) kann man demnach jetzt so aussprechen: Der Ausdruck für P ist positiv oder negativ, je nachdem (x', y') in der positiven oder negativen Region der Ebene liegt; sein Zahlenwerth ist dem von $(x' y')$ auf $ax + by + c = 0$ gefällten Lothe gleich.

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang} w - \operatorname{tang} w'}{1 + \operatorname{tang} w \operatorname{tang} w'}.$$

Nun ist:

$$\operatorname{tang} w = \frac{l \sin\varphi}{1 + l\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang} w' = \frac{l' \sin\varphi}{1 + l'\cos\varphi},$$

also:

$$\operatorname{tang} w - \operatorname{tang} w' = \frac{l \sin\varphi}{1 + l\cos\varphi} - \frac{l' \sin\varphi}{1 + l'\cos\varphi}$$

$$= \frac{(l - l')\sin\varphi}{(1 + l\cos\varphi)(1 + l'\cos\varphi)},$$

und:

$$1 + \operatorname{tang} w \operatorname{tang} w' = 1 + \frac{ll' \sin\varphi^2}{(1 + l\cos\varphi)(1 + l'\cos\varphi)}$$

$$= \frac{1 + (l + l')\cos\varphi + ll'}{(1 + l\cos\varphi)(1 + l'\cos\varphi)};$$

folglich:

$$(6) \quad \operatorname{tang} u = \frac{(l - l')\sin\varphi}{1 + (l + l')\cos\varphi + ll'}.$$

Die Geraden (5) sind demnach parallel, wenn $l - l' = 0$ (§. 19) und sie stehen auf einander senkrecht, wenn:

$$(7) \quad 1 + (l + l')\cos\varphi + ll' = 0.$$

Die übrigen Aufgaben, welche sich hier noch anschliessen, sehe man weiter unten Kap. 7.

Drittes Kapitel.

Der Kreis.

§. 25. Gleichung des Kreises. Der Ort aller Punkte einer Ebene, welche von einem gegebenen Punkte derselben Ebene constante Entfernung haben, ist ein Kreis, der gegebene Punkt heisst der Mittelpunkt, die constante Entfernung der Radius desselben.

Aufgabe. Die Gleichung eines Kreises aufzustellen, der mit dem Radius r um den Mittelpunkt (p, q) beschrieben ist. Sind die Coordinaten schiefwinklige und (x, y) irgend ein Punkt des Kreises, so muss sein (§. 11, Formel 6):

$$(1)\quad (x-p)^2+2(x-p)(y-q)\cos\varphi+(y-q)^2=r^2,$$

und für ein rechtwinkliges System:

$$(2)\quad (x-p)^2+(y-q)^2=r^2.$$

Der Einfachheit halber werden wir uns im Laufe dieses Kapitels nur rechtwinkliger Coordinaten bedienen.

Liegt der Mittelpunkt auf der x-Axe, und berührt der Kreis ausserdem die Ordinatenaxe, so ist $p=r$, $q=0$, und die Gleichung (2) wird nach Auflösung der Klammern:

$$(3)\quad x^2-2rx+y^2=0;$$

ist der Kreis um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben, so wird $p=0$, $q=0$, also ist dann die Kreisgleichung:

$$(4)\quad x^2+y^2=r^2.$$

Löst man in der allgemeinen Formel (2) die Klammern auf, so kommt $x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0$; die Kreisgleichung enthält also ausser einem Ausdrucke erster Ordnung:

$$-2px-2qy+p^2+q^2-r^2$$

noch die Glieder x^2+y^2. Umgekehrt hat man den Satz:

eine Gleichung, in welcher ausser einem Ausdrucke erster Ordnung noch x^2 und y^2 mit demselben Coefficienten behaftet vorkommen, also eine Gleichung von der Form:

$$(5)\quad ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$$

stellt im Allgemeinen einen Kreis dar.

In der That kann man (5) oder:

$$x^2+y^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}y+\frac{d}{a}=0$$

in folgende Gleichung transformiren:

$$(6)\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y+\frac{c}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c^2}{4a^2}-\frac{d}{a}=\frac{b^2+c^2-4ad}{4a^2}.$$

Vergleicht man (6) mit (2), so sieht man, dass alle Punkte, welche die Gleichung (6), oder was dasselbe ist (5) befriedigen, in einem Kreise liegen, der um den Punkt $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{c}{2a}\right)$ mit dem Radius $r=\sqrt{\frac{b^2+c^2-4ad}{4a^2}}$ beschrieben ist.

Damit r reell sei, muss b^2+c^2-4ad positiv sein; ist der letztere Ausdruck negativ, so hat (6) gar keine geometrische Bedeutung; denn die Summe der beiden Quadrate links kann nicht negativ werden; ist $b^2+c^2-4ad=0$, so genügt der Gleichung (6) nur der einzelne Punkt $x=-\frac{b}{2a}$, $y=-\frac{c}{2a}$, denn damit die Summe der beiden Quadrate $=0$ sei, muss es jedes einzeln sein. (Vgl. §. 12, Anm.)

Anm. Man findet für ein schiefwinkliges System mit dem Axenwinkel φ durch Vergleichung mit (1), dass:

$$ax^2+2axy\cos\varphi+ay^2+bx+cy+d=0$$

einen Kreis darstellt.

Als Anwendung diene folgende

§. 26. Aufgabe. Den Ort aller Punkte u zu bestimmen, für welche die Entfernungen von zwei festen Punkten a und b in einem constanten Verhältnisse stehen. (Fig. 19.)

Auflösung. Es sei $\frac{ua}{ub}=\frac{m}{n}$, wo m und n gegebene Zahlen oder Linien vorstellen sollen, und $m>n$, oder wenigstens nicht kleiner; die Gerade ab sei die Abscissenaxe, a der Anfangspunkt, die Abscisse von $b=\beta$, die Coordinaten von u seien x und y. Dann ist:

$$ua=\sqrt{x^2+y^2},\quad ub=\sqrt{(x-\beta)^2+y^2},$$

also:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-\beta)^2+y^2}}=\frac{m}{n};$$

und nach Wegschaffung der Wurzel und des Nenners:

$$(1)\quad (m^2-n^2)(x^2+y^2)-2m^2\beta x+m^2\beta^2=0;$$

dies ist nach §. 25 die Gleichung eines Kreises; also liegen alle Punkte u, welche der gegebenen Bedingung genügen, in einem Kreise. Man kann statt (1) schreiben:

$$(2)\quad \left(x-\frac{m^2\beta}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\frac{m^4\beta^2}{(m^2-n^2)^2}-\frac{m^2\beta^2}{m^2-n^2}=\frac{m^2n^2\beta^2}{(m^2-n^2)^2};$$

der Mittelpunkt des Kreises liegt also auf der Abscissenaxe ab, seine Abscisse ist $=\frac{m^2\beta}{m^2-n^2}$, der Radius $=\frac{mn\beta}{m^2-n^2}$. Um die Durchschnitte des Kreises und der Abscissenaxe zu finden, muss man die Glei-

chung (2) und die Gleichung der Abscissenaxe, d. h. $y = 0$ combiniren, und man erhält $x - \frac{m^2\beta}{m^2 - n^2} = \pm \frac{mn\beta}{m^2 - n^2}$; woraus zwei Werthe des x sich ergeben:

$$x_1 = \frac{m^2\beta}{m^2 - n^2} + \frac{mn\beta}{m^2 - n^2} = \frac{m\beta}{m - n} = \beta + \frac{n}{m - n}\beta,$$

$$x_2 = \frac{m^2\beta}{m^2 - n^2} - \frac{mn\beta}{m^2 - n^2} = \frac{m\beta}{m + n} = \beta - \frac{n}{m + n}\beta.$$

Weil $m - n$ positiv ist, so ist offenbar $x_1 > x_2$; x_2 ist die Abscisse eines Durchschnittes v'', der zwischen a und b, x_1 die Abscisse eines Durchschnittes v', der über b hinaus liegt. Ferner ist:

$$v'a = x_1 = \frac{m\beta}{m - n},\ v'b = \frac{m\beta}{m - n} - \beta = \frac{n\beta}{m - n},\ \text{woraus}\ \frac{v'a}{v'b} = \frac{m}{n};$$

$$v''a = x_2 = \frac{m\beta}{m + n},\ v''b = \beta - \frac{m\beta}{m + n} = \frac{n\beta}{m + n},\ \text{woraus}\ \frac{v''a}{v''b} = \frac{m}{n}.$$

Bestimmt man also innerhalb und auf der Verlängerung von ab zwei Punkte v'' und v', deren Entfernungen von a und von b sich für einen jeden wie m zu n verhalten, und beschreibt über $v'v''$ als Durchmesser einen Kreis, so wird für einen jeden Punkt u desselben ua zu ub sich wie m zu n verhalten. — Weil $\frac{v'a}{v'b} = \frac{v''a}{v''b}$, so sind v', v''; a und b harmonische Punkte *).

Anm. Ist $m = n$, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

---

*) Ueber die Theorie der harmonischen Punkte und Geraden, welche jetzt in den vollständigeren Lehrbüchern der Planimetrie nicht mehr übergangen wird, siehe Kap. 9. Hier bemerken wir nur, dass vier auf einander folgende Punkte a, b, c, d harmonische heissen, wenn I. $\frac{ab}{ad} = \frac{cb}{cd}$, woraus II. $\frac{ba}{bc} = \frac{da}{dc}$; a und c so wie b und d heissen conjugirte Punkte. Nennt man m die Mitte von ac, so ergiebt sich, dass b und d auf derselben Seite von m so liegen, dass:

$$\text{III.}\quad am^2 = cm^2 = bm \,.\, dm,$$

und ist n die Mitte von b, d, so liegen a und c auf derselben Seite von n so, dass:

$$\text{IV.}\quad bn^2 = dn^2 = an \,.\, cn;$$

von den vier Gleichungen I—IV ist jede eine Folge der übrigen.

$-2m^2x\beta+m^2\beta^2=0$, oder $x=\frac{\beta}{2}$, d. h. der Ort aller Punkte u, für welche $\frac{ua}{ub}=1$, ist das Loth, welches ab halbirt.

§. 27. Bestimmung eines Kreises. Da die Gleichung des Kreises drei Constanten enthält, den Radius r und die Mittelpunkts-Coordinaten p, q, oder unter der Form $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, die Verhältnisse der Grössen a, b, c, d, so kann man im Allgemeinen einen Kreis bestimmen, der drei vorgeschriebenen Bedingungen genügt. Soll er z. B. durch (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') gehen, so muss sein:

$$(x'-p)^2+(y'-q)^2-r^2=0,$$

oder:

$$x'^2+y'^2=2px'+2qy'+r^2-p^2-q^2,$$

ebenso:

$$x''^2+y''^2=2px''+2qy''+r^2-p^2-q^2,$$
$$x'''^2+y'''^2=2px'''+2qy'''+r^2-p^2-q^2.$$

Aus diesen Gleichungen kann man p, q, $r^2-p^2-q^2$, also auch r berechnen; man erhält diese Grössen als Brüche mit dem gemeinschaftlichen Nenner:

$$x''y'''-x'''y''+x'''y'-x'y'''+x'y''-x''y'.$$

Damit p, q, r endliche Werthe bekommen, darf derselbe nicht $=0$ werden, d. h. die gegebenen Punkte dürfen nicht in einer Geraden liegen (§. 6, Formel 4).

§. 28. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente an einem Punkte (x', y') des Kreises:

$$(1)\quad (x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0$$

aufzustellen.

In Folge der aus den Elementen bekannten Eigenschaft der Tangente kommt die Aufgabe darauf zurück, durch den Punkt (x', y') eine Gerade zu legen, welche auf der durch (x', y') und den Mittelpunkt (p, q) gehenden Geraden senkrecht sei; wir wollen jedoch die Kenntniss dieser Eigenschaft nicht voraussetzen und die Gleichung der Tangente nach einer für alle algebraischen Curven anwendbaren Methode aufstellen. — Denkt man sich durch einen festen Punkt (x', y') auf einer Curve und durch einen beweglichen g auf derselben eine unendliche Gerade G gezogen, und lässt man den

Punkt g dem Punkte (x', y') bis zum Zusammenfallen nahe rücken, so nennt man die Gerade G in der Gränzlage, welche sie alsdann erreicht, die Tangente der Curve in (x', y').

Die Gleichung irgend einer durch (x', y') gehenden Geraden ist (§. 18, Anm. 1) $y - y' = l(x - x')$, oder symmetrischer:

$$(2) \quad \frac{x - x'}{k} = \frac{y - y'}{l};$$

es handelt sich jetzt darum, k und l, oder genauer das Verhältniss $\frac{l}{k}$ so zu bestimmen, dass (2) die Tangente werde.

Die Durchschnitte der Geraden (2) und des Kreises findet man durch Auflösung von (1) und (2); wir setzen zu dem Ende die gleichen Brüche in (2) gleich ε, woraus:

$$(3) \quad x = x' + k\varepsilon, \quad y = y' + l\varepsilon,$$

und durch Substitution dieser Werthe in (1):

$$(4) \quad (k^2 + l^2)\varepsilon^2 + 2\varepsilon\{k(x' - p) + l(y' - q)\} \\ + (x' - p)^2 + (y' - q)^2 - r^2 = 0.$$

Weil nach der Voraussetzung (x', y') ein Punkt des Kreises (1) ist, hat man:

$$(5) \quad (x' - p)^2 + (y' - q)^2 - r^2 = 0;$$

dadurch verwandelt sich (4) in:

$$(6) \quad \varepsilon\{\varepsilon(k^2 + l^2) + 2k(x' - p) + 2l(y' - q)\} = 0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn $\varepsilon = 0$, und wenn:

$$\varepsilon = -\frac{2}{k^2 + l^2}\{k(x' - p) + l(y' - q)\}$$

ist; der erste Werth von ε in (3) eingesetzt, giebt $x = x'$, $y = y'$, d. h. einer der Durchschnitte von (1) und (2) ist der gegebene Punkt selbst. Substituirt man in (3) den zweiten Werth von ε, so erhält man die Coordinaten eines zweiten Durchschnittspunktes. Sollen diese mit (x', y') zusammen fallen, so muss auch der zweite Werth von $\varepsilon = 0$ sein, d. h.:

$$k(x' - p) + l(y' - q) = 0, \text{ oder: } \frac{l}{k} = -\frac{x' - p}{y' - q}.$$

Setzt man dies in (2) oder $y - y' = \frac{l}{k}(x - x')$ ein, so erhält man die Gleichung der Tangente:

$$(7)\quad y-y'=-\frac{x'-p}{y'-q}(x-x').$$

Die Gleichung der Geraden, welche durch den Mittelpunkt (p, q) und den Berührungspunkt (x', y') geht und in welcher der Radius liegt, ist:

$$(8)\quad y-y'=\frac{y'-q}{x'-p}(x-x');$$

für (7) und (8) ist die Bedingung erfüllt, in Folge deren die durch diese Gleichungen dargestellten Linien senkrecht stehen (§. 22, Form. 2), nämlich:

$$1-\frac{x'-p}{y'-q}\cdot\frac{y'-q}{x'-p}=0.$$

Die Gleichung der Tangente (7) lässt sich noch transformiren; schreibt man $y-q-(y'-q)$ statt $y-y'$ und $x-p-(x'-p)$ statt $x-x'$ und schafft den Nenner fort, so kommt:

$$(y-q)(y'-q)-(y'-q)^2+(x-p)(x'-p)-(x'-p)^2=0,$$

oder mit Berücksichtigung von (5):

$$(9)\quad (x-p)(x'-p)+(y-q)(y'-q)-r^2=0.$$

Dies ist die Gleichung der Tangente in ihrer einfachsten Form. Ist $p=0$, $q=0$, also die Gleichung des Kreises:

$$(10)\quad x^2+y^2=r^2,$$

so wird die der Tangente:

$$(11)\quad xx'+yy'=r^2.$$

Anm. Eine andere weniger allgemeine Ableitung der Gleichung der Tangente, die sich aber durch ihre Leichtigkeit empfiehlt und auch bei einigen anderen Curven gebraucht werden kann, ist folgende. Die Gleichung einer durch (x', y') und (x'', y'') gehenden Geraden ist:

$$(12)\quad y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x').$$

Liegen beide Punkte auf dem Kreise (10), so muss man haben:

$$x'^2+y'^2=r^2,\quad x''^2+y''^2=r^2,$$

woraus:

$$x''^2-x'^2+y''^2-y'^2=0 \quad\text{und:}\quad \frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x''+x'}{y''+y'},$$

also verwandelt sich (12) in:

$$(13)\quad y-y'=-\frac{x''+x'}{y''+y'}(x-x');$$

dies ist die Gleichung einer Kreis-Secante; damit sie die Gleichung einer Tangente werde, muss man (x'', y'') mit (x', y') zusammenfallen lassen; dadurch verwandeln sich $x''+x'$ und $y''+y'$ bezüglich in $2x'$ und $2y'$, also (13) in:

$$y-y'=-\frac{x'}{y'}(x-x'),\quad \text{oder:}\quad yy'-y'^2+xx'-x'^2=0,$$

welche Gleichung wegen $x'^2+y'^2=r^2$ auf (11) zurückkommt.

Die analytisch-geometrische Lösung der Aufgabe, von einem Punkte ausserhalb Tangenten an den Kreis zu ziehen, übergehen wir, weil das allgemeinere Problem (für die Ellipse) im nächsten Kapitel behandelt wird.

§. 29. Combination einer Geraden und eines Kreises. In dem vorigen Paragraph haben wir gesehen, dass die Coordinaten des Durchschnittes des Kreises:

$$(1)\quad (x-p)^2+(y-q)^2-r^2=0$$

mit der durch irgend einen Punkt (x', y') gezogenen Geraden:

$$(2)\quad \frac{x-x'}{k}=\frac{y-y'}{l},\quad \text{oder:}\quad (2^*)\quad k(y-y')-l(x-x')=0$$

vermittelst der Formeln:

$$(3)\quad x=x'+k\varepsilon,\quad y=y'+l\varepsilon$$

gegeben sind, wo ε eine Wurzel der quadratischen Gleichung:

$$(4)\quad \varepsilon^2(k^2+l^2)+2\varepsilon\{k(x'-p)+l(y'-q)\}$$
$$+(x'-p)^2+(y'-q)^2-r^2=0$$

bedeutet. Nun hat bekanntlich die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$\varepsilon^2L+2\varepsilon M+N=0$$

die beiden Wurzeln $\dfrac{-M+\sqrt{M^2-LN}}{L}$, $\dfrac{-M-\sqrt{M^2-LN}}{L}$, welche reell und ungleich, reell und gleich, oder imaginär sind, je nachdem $M^2-LN>0$, $=0$, oder <0 ist. Also haben (1) und (2) zwei reelle und verschiedene, zwei reelle aber zusammenfallende, oder gar keine reellen Durchschnittspunkte, je nachdem:

$$(5)\quad \{k(x'-p)+l(y'-q)\}^2-(k^2+l^2)\{(x'-p)^2+(y'-q)^2-r^2\} \gtreqless 0$$

ist. Nach §. 22, Form. 6 kann man (5) transformiren und hat dafür:

$$(6)\quad (k^2+l^2)r^2-\{k(y'-q)-l(x'-p)\}^2 \gtreqless 0,$$

oder, weil man jede Ungleichheit mit einer positiven Grösse wie k^2+l^2 dividiren darf:

$$(7)\quad r^2-\frac{\{k(y'-q)-l(x'-p)\}^2}{k^2+l^2} \gtreqless 0.$$

Nach §. 23, Form. 7 ist $\frac{\{k(y'-q)-l(x'-p)\}^2}{k^2+l^2}=P^2$, d. h. gleich dem Quadrate des vom Punkte (p, q) oder dem Mittelpunkte auf die Gerade (2) gefällten Lothes; die Gerade (2) und der Kreis (1) haben also zwei verschiedene, zwei zusammenfallende oder gar keine reellen Durchschnittspunkte, mit anderen Worten, die Gerade ist eine Secante, eine Tangente, oder eine den Kreis gar nicht schneidende Linie, je nachdem der Radius grösser, gleich oder kleiner ist, als das vom Mittelpunkte auf die Gerade gefällte Loth.

Die Interpretation der Hülfsgrösse ε in (3) führt zu einem anderen Satze. Aus (3) folgt:

$$(x-x')^2+(y-y')^2=(k^2+l^2)\varepsilon^2,$$

also ist $\varepsilon\sqrt{k^2+l^2}$ gleich plus oder minus der Entfernung eines Punktes (x, y) der Geraden (2) vom festen Punkte (x', y'). Für welche Punkte der Geraden das eine oder andere Zeichen gilt, ist hier gleichgültig, allein man sieht leicht, dass für die beiden unendlichen Hälften der Geraden (2), welche der auf ihr liegende Punkt (x', y') bestimmt, entgegengesetzte Zeichen gelten; denn für die eine Hälfte wird $x-x'$ positiv, für die andere negativ sein, dasselbe gilt also auch zufolge (3) für $k\varepsilon$, und demnach für $\varepsilon\sqrt{k^2+l^2}$. Setzt man:

$$\varepsilon\sqrt{k^2+l^2}=\varrho,\quad \text{also:}\quad \varepsilon=\frac{\varrho}{\sqrt{k^2+l^2}},$$

so verwandelt sich (4) in:

$$(8)\quad \varrho^2+\frac{2\varrho}{\sqrt{k^2+l^2}}\{k(x'-p)+l(y'-q)\}$$
$$+(x'-p)^2+(y'-q)^2-r^2=0.$$

Nennt man ϱ', ϱ'' die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, so kommt:

$$(9) \quad \varrho'\varrho'' = (x'-p)^2 + (y'-q)^2 - r^2.$$

Da die verschiedenen durch (x', y') gehenden Geraden (2) sich nur durch den Werth unterscheiden, welchen das Verhältniss $\frac{l}{k}$ hat, und in (9) k und l nicht vorkommen, so bleibt $\varrho'\varrho''$ für alle durch (x', y') gehenden Geraden constant; wir haben also den Satz:

Zieht man durch einen festen Punkt u (Fig. 20) mehrere Gerade, von denen jede den Kreis in zwei Punkten α, β; α', β' u. s. w. trifft, so sind die Producte der Entfernungen $u\alpha . u\beta$; $u\alpha' . u\beta'$ u. s. w. einander gleich. — Zu diesen Producten gehört für einen äusseren Punkt u das Quadrat der von u an den Kreis gelegten Tangente $u\alpha''^2$; für einen inneren Punkt u das Quadrat $u\alpha''^2$ der halben Sehne $\alpha''\beta''$, welche auf dem durch u gehenden Durchmesser senkrecht steht, und die kleinste von allen durch u gezogenen Sehnen ist.

Wir nennen, nach Steiner, dies constante Product mit dem $+$ oder $-$ Zeichen versehen, je nachdem (x', y') oder der feste Punkt u ausserhalb oder zwischen den Durchschnittspunkten liegt, die Potenz des Punktes u in Bezug auf den Kreis; die rechte Seite in (9) ist ihr analytischer Ausdruck. Ist O der Mittelpunkt des Kreises, so ist nach (9) die Potenz des Punktes u gleich $\overline{Ou}^2 - r^2$; sie ist also positiv für Punkte ausserhalb des Kreises, $= 0$ für Punkte der Kreislinie, negativ für Punkte innerhalb des Kreises, was mit dem Obigen übereinstimmt.

§. 30. System von zwei und drei Kreisen, Linie gleicher Potenzen.

Sind:

$$(1) \quad (x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0,$$
$$(2) \quad (x-p')^2 + (y-q')^2 - r'^2 = 0,$$

die Gleichungen zweier Kreise, so werden für die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte beide Gleichungen, also auch irgend eine Folgerung aus ihnen gültig sein. Zieht man (1) und (2) von einander ab, so erhält man eine Gleichung erster Ordnung, welcher demnach die Schnittpunkte beider Kreise genügen:

$$(3) \quad 2(p'-p)x + 2(q'-q)y + p^2 + q^2 - r^2 - (p'^2 + q'^2 - r'^2) = 0.$$

Umgekehrt jedes Werthepaar von x und y, das den Gleichungen (1) und (3) genügt, wird auch der Gleichung (2) genügen, weil (2) eine Folgerung aus (1) und (3) ist. Da (3) als Gleichung erster Ordnung die Gleichung einer Geraden ist, so gehen also die beiden Kreise (1) und (2) und die Gerade (3) durch dieselben Punkte, d. h. wenn (1) und (2) sich schneiden, so ist (3) die Gleichung der gemeinschaftlichen Sehne. Man überzeugt sich leicht, dass (3) und die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, nämlich:

$$(4) \quad (q'-q)x-(p'-p)y+p'q-pq'=0$$

auf einander senkrecht stehen. Berühren sich die beiden Kreise, oder fallen die Schnittpunkte in einen zusammen, so genügen die Coordinaten desselben immer noch der Gleichung (3), und weil (3) auf der Centrale (4) senkrecht steht, so ist (3) die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente. Es fragt sich nun, welches die Bedeutung von (3) ist, wenn die Kreise (1) und (2) sich nicht schneiden, denn offenbar ist (3) unter allen Umständen eine construirbare gerade Linie. Nach §. 29 ist die Potenz irgend eines Punktes (x, y) in Bezug auf den Kreis (1) gleich $(x-p)^2+(y-q)^2-r^2$, und ähnlich für den Kreis (2). Soll nun ein Punkt (x, y) in Bezug auf beide Kreise gleiche Potenz haben, so muss sein:

$$(x-p)^2+(y-q)^2-r^2-\{(x-p')^2+(y-q')^2-r'^2\}=0,$$

d. h. da diese Gleichung mit (3) übereinstimmt, der Punkt (x, y) muss auf der Geraden (3) liegen und umgekehrt, jeder Punkt dieser Geraden hat die verlangte Eigenschaft. Also:

I. Der Ort aller Punkte, welche in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenzen haben, ist eine Gerade, die auf der Centrale senkrecht steht; schneiden sich die beiden Kreise, so ist die Linie gleicher Potenzen (zuweilen Radicalaxe genannt) die gemeinschaftliche Sehne, berühren sie sich, so ist sie die gemeinschaftliche Tangente.

Sucht man die Coordinaten der Durchschnittspunkte von (1) und (2), so werden dieselben für den Fall, dass die Kreise sich nicht schneiden, imaginär; genügen aber natürlich noch der Gleichung (3), weil sie (1) und (2) befriedigen; man sagt deshalb auch, die Kreise schneiden sich in zwei imaginären Punkten, für welche freilich eine geometrische Darstellung nicht möglich ist. Die Gerade

(3) heisst daher in diesem Falle eine **imaginäre** oder **ideale Secante** beider Kreise. Da die Potenz eines äusseren Punktes in Bezug auf einen Kreis das Quadrat der von dem Punkte an den Kreis gelegten Tangente ist, so folgt daraus, dass die Tangenten, welche von einem Punkte der Linie gleicher Potenzen an zwei Kreise gelegt sind, gleich sein müssen.

Es sei die Gleichung eines dritten Kreises:

$$(5)\quad (x-p'')^2+(y-q'')^2-r''^2=0;$$

bezeichnen wir die linken Seiten der Gleichungen (1), (2), (5) mit U, U', U'', so sind:

$$(6)\quad U-U'=0,\qquad (7)\quad U-U''=0,\qquad (8)\quad U'-U''=0$$

die Linien gleicher Potenzen zwischen dem ersten und zweiten, dem ersten und dritten, und dem zweiten und dritten Kreise; da jede dieser Gleichungen (z. B. 8) als eine Folge der beiden anderen (von 6 und 7) angesehen werden kann, so wird die gemeinschaftliche Lösung je zweier auch die dritte befriedigen, d. h. die drei Geraden (6), (7), (8) gehen durch einen Punkt (§. 14), oder:

II. **Die drei Linien gleicher Potenzen von je zweien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.**

Wir übergehen die Discussion einzelner Fälle, in welchen die Sätze dieses Paragraphen Ausnahmen erleiden; so haben z. B. zwei concentrische Kreise keine Linie gleicher Potenzen, drei Kreise, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, keinen Punkt gleicher Potenzen.

Sind U und U' zwei sich nicht schneidende Kreise, so kann ihre Linie gleicher Potenzen durch Satz II. leicht gefunden werden. Beschreibt man einen Kreis U'', der sowohl U als U' in zwei Punkten schneidet, und treffen sich die gemeinschaftlichen Sehnen von U und U'', U' und U'' in a, so geht auch die Linie gleicher Potenzen von U und U' durch a; man kann nun entweder einen zweiten Punkt dieser Geraden auf dieselbe Weise finden, oder von a auf die Centrale von U und U' ein Loth fällen.

Berührt der Kreis U' den Kreis U in einem Punkte α, und schneidet U'' den Kreis U' in a und b, und U in c und d, so gehen die Tangenten von U im Punkte α und die Geraden ab und cd durch einen Punkt u. Dieser Punkt bleibt derselbe, wenn statt des Kreises U'' ein anderer durch a und b gehender beschrieben

wird, weil u schon als Durchschnitt der Tangente in α und der Geraden ab bestimmt ist.

Soll umgekehrt ein Kreis beschrieben werden, der durch zwei gegebene Punkte a und b geht, und einen gegebenen Kreis U berührt, so lege man durch a und b irgend einen Kreis U'', der U in c und d schneidet, und verlängere ab, cd, bis sie sich in u treffen. Legt man alsdann von u eine Tangente $u\alpha$ an den gegebenen Kreis U, und ist α der Berührungspunkt, so wird der durch a, b und α gehende Kreis U' der verlangte sein. Solcher Kreise U' giebt es demnach zwei.

Viertes Kapitel.

Die Ellipse.

§. 31. Der Ort aller Punkte G (Fig. 21), für welche die Summe der Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten F und F' constant ist, heisst eine Ellipse, die Punkte F und F' heissen die Brennpunkte, ihre Entfernung die Excentricität; zwei Gerade, wie FG, $F'G$, heissen Radien-Vectoren oder Leitstrahlen.

Aufgabe. Die Gleichung der Ellipse aufzustellen.

Es sei $FF' = 2e$, die constante Summe $FG + F'G = 2a$, und weil $FG + F'G > FF'$, so ist $a > e$. Die Gerade FF' nehmen wir als x-Axe, O die Mitte von FF' als den Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten; die Abscisse von F sei $+e$, die Coordinaten von G seien x und y; dann hat man:

$$GF = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}, \quad GF' = \sqrt{(x+e)^2 + y^2};$$

also ist die Gleichung der Ellipse:

$$(1) \quad \sqrt{(x-e)^2 + y^2} + \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a.$$

Um neue Eigenschaften der Ellipse zu finden, machen wir (1) rational und setzen $x^2 + y^2 + e^2 = m$, so wird (1):

$$(2) \quad \sqrt{m - 2xe} + \sqrt{m + 2xe} = 2a;$$

und wenn man quadrirt:

$$(3)\quad 2m + 2\sqrt{m^2 - 4x^2e^2} = 4a^2,$$

woraus:

$$(4)\quad (m - 2a^2)^2 = m^2 - 4x^2e^2.$$

Durch Auflösung der Klammern erhält man:

$$a^4 - a^2m = -x^2e^2, \quad \text{oder:} \quad a^4 - a^2e^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = -x^2e^2,$$

also:

$$(5)\quad a^2(a^2 - e^2) = (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2.$$

Setzt man:

$$(6)\quad a^2 - e^2 = b^2,$$

und dividirt (5) durch a^2b^2, so kommt als Gleichung der Ellipse:

$$(7)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Eine andere Ableitung von (5) ergiebt sich aus §. 40, Form. 1—4.

Zusatz 1. Man darf Gleichung (7) statt (1) gebrauchen, weil man von (7) auf (1) zurück schliessen kann, vorausgesetzt, dass $a > e$ ist. Man folgert aus (7) ohne Schwierigkeit (4); aus Gleichung (4) durch Wurzelausziehen und Multiplication mit (2):

$$2m \pm 2\sqrt{m^2 - 4x^2e^2} = 4a^2, \text{ oder: } (\sqrt{m + 2ex} \pm \sqrt{m - 2ex})^2 = 4a^2;$$

d. h. für jeden Punkt der Curve (7) oder (5) ist entweder $(F'G + FG)^2 = 4a^2$, oder $(F'G - FG)^2 = 4a^2$; die zweite Annahme ist aber unzulässig; denn nach einem elementaren Satz ist $F'G - FG$ oder $FG - F'G$ (je nachdem $F'G \gtrless FG$) kleiner als FF', also $(F'G - FG)^2 < 4e^2$, und wenn $e < a$, kann $(F'G - FG)^2$ nicht $= 4a^2$ sein, es bleibt daher nur $F'G + FG = 2a$ oder Gleichung (1).

Zusatz 2. Da (7) nur die Quadrate der Coordinaten enthält, so werden, wenn ein Punkt (x, y) auf der Curve liegt, auch die Punkte $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ sich auf ihr befinden; diese bilden mit (x, y) ein zu den Axen symmetrisches Rechteck, wie $GG_1G_2G_3$ (Fig. 21). Die Ellipse besteht demnach aus vier congruenten Quadranten; jede durch O gehende Sehne GG_2 wird in O halbirt und heisst daher ein Durchmesser, so wie O der Mittelpunkt der Ellipse. Zwei zu den Axen symmetrisch gelegene Durchmesser sind einander gleich; z. B. GG_2, G_1G_3. Für die Durch-

schnitte der x-Axe mit der Ellipse ist $y = 0$, also $\frac{x^2}{a^2} = 1$, und $x = \pm a$; dies sind die Abscissen zweier Punkte A, A', deren Distanz $= 2a$, also gleich der constanten Summe $FG + F'G$ ist; eben so findet man für die Durchschnitte der y-Axe mit der Curve, B und B', $x = 0$, $y = \pm b$. AA' heisst die grosse, BB' die kleine Axe der Curve; ihre Endpunkte die Scheitel. Da wegen Gleichung (7) die Summe der positiven Brüche $\frac{x^2}{a^2}$, $\frac{y^2}{b^2}$ der Einheit gleich sein muss, so kann jeder von ihnen dieselbe nicht überschreiten; also ist der numerische Werth von x kleiner oder gleich a, und von y kleiner oder gleich b, und die Ellipse liegt ganz innerhalb eines Rechtecks, für welches A, A', B, B' die Mitten der Gegenseiten sind.

§. 32. Construction der Ellipse durch Punkte. Aus der Gleichung der Ellipse folgt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ oder $\frac{y^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{a^2}$. In Fig. 21 ist $AJ = a - x$, $A'J = a + x$; also haben wir den Satz:

I. In der Ellipse verhält sich das Quadrat der Ordinate zu dem Rechteck der Segmente der grossen Axe wie b^2 zu a^2.

Für $b = a$ wird die Ellipse ein Kreis; beschreibt man daher über AA' (Fig. 21) als Durchmesser einen Kreis, und bezeichnet die zu derselben Abscisse OJ gehörende Kreisordinate JD mit Y, so ist $Y^2 = a^2 - x^2$, woraus $y^2 = \frac{b^2}{a^2} Y^2$, und $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$, d. h.:

II. Wird über der grossen Axe als Durchmesser ein Kreis beschrieben, so verhalten sich die Ellipsenordinaten zu den entsprechenden Kreisordinaten wie die kleine Axe zur grossen.

Aehnliche Sätze wie I. und II. finden in Bezug auf die kleine Axe statt.

Beschreibt man demnach über AA' und BB' (Fig. 22) als Durchmesser zwei Kreise, zieht vom Mittelpunkte O eine Gerade, welche den ersten Kreis in D, den zweiten in D' schneidet, ferner von D eine Parallele zu BB' und von D' eine Parallele zu AA', so

ist ihr Durchschnitt G ein Punkt der über AA' und BB' als Axen beschriebenen Ellipse; denn $GJ:DJ = D'O:DO = b:a$.

Zieht man von G zum Radius DO eine Parallele, welche AA' in K, BB' in L trifft, so ist $GK = D'O = b$, $GL = DO = a$. Trägt man auf AA' die Länge $JK' = JK$ ab, und zieht die Gerade $K'G$, welche BB' in L' trifft, so sind die Dreiecke GKK', GLL' gleichschenklig, also wiederum $GK' = b$, $GL' = a$. Stellt man sich diese Constructionen für alle Punkte der Ellipse wiederholt vor, so erhält man den Satz:

III. Bewegt sich eine Gerade von constanter Länge (KL oder $K'L'$) so, dass ihre Endpunkte stets auf zwei rechtwinkligen Axen bleiben, so beschreibt ein Punkt G dieser Geraden eine Ellipse, deren Axen den Entfernungen des Punktes G von den Endpunkten der constanten Länge gleich sind (GK und GL oder GK' und GL'). Der Punkt G kann eben so wohl auf der constanten Länge selbst (wie auf $K'L'$), als auch auf deren Verlängerung liegen (wie auf KL).

§. 33. Durchmesser der Ellipse. Ist $2d$ der durch G gehende Durchmesser, also (Fig. 22) $OG = d$, und die positive Drehung von OA nach $OG = \varphi$, also die Coordinaten von G gleich $d\cos\varphi$, $d\sin\varphi$, so ist wegen der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{d^2\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{d^2\sin\varphi^2}{b^2} = 1,$$

woraus:

$$(1)\quad \frac{1}{d^2} = \frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2}, \quad \text{oder:}\quad d^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos\varphi^2 + a^2\sin\varphi^2}.$$

Der Nenner, welcher $= b^2 + (a^2 - b^2)\sin\varphi^2 = b^2 + e^2\sin\varphi^2$, ist am kleinsten für $\varphi = 0$ und $= 180^0$, am grössten für $\varphi = 90^0$ und $= 270^0$; also ist umgekehrt die grosse Axe der grösste, die kleine Axe der kleinste Durchmesser der Ellipse. Steht der Durchmesser $2d'$ auf $2d$ senkrecht, so hat φ für ihn einen um 90^0 grösseren Werth, und weil $\cos(90^0 + \varphi) = -\sin\varphi$, $\sin(90^0 + \varphi) = \cos\varphi$, so ist:

$$(2)\quad \frac{1}{d'^2} = \frac{\sin\varphi^2}{a^2} + \frac{\cos\varphi^2}{b^2}.$$

Addirt man (1) und (2), so kommt $\frac{1}{d^2} + \frac{1}{d'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$,

d. h. für je zwei rechtwinklige Halbmesser ist die Summe der reciproken Quadrate constant $= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

§. 34. Conjugirte Durchmesser. Der Durchmesser LL' (Fig. 23) halbire die Sehne PP_1 in Q; wir setzen $PP_1 = 2u$, $OQ = t$ und die positive Drehung der $+x$-Axe nach $OQ = \varphi$; es sei ferner ψ der im positiven Sinne gezählte Winkel zwischen einer durch Q zur $+x$-Axe parallel gelegenen Linie und QP. Sind (x, y), (x', y') die Coordinaten von P und Q auf das bisherige Axensystem, (X, Y) die Coordinaten von P auf ein gleich gerichtetes mit dem Anfangspunkte Q, so ist:

$$X = x - x', \quad Y = y - y'; \quad X = u\cos\psi, \quad Y = u\sin\psi;$$
$$x' = t\cos\varphi, \quad y' = t\sin\varphi;$$

woraus:

$$(1) \quad x = t\cos\varphi + u\cos\psi, \quad y = t\sin\varphi + u\sin\psi.$$

Für den Punkt P_1 oder (x_1, y_1) ist $180^0 + \psi$ statt ψ zu setzen, also:

$$(2) \quad x_1 = t\cos\varphi - u\cos\psi, \quad y_1 = t\sin\varphi - u\sin\psi.$$

Beide Werthepaare müssen der Gleichung der Ellipse genügen, also hat man, wenn man sie einsetzt und ordnet:

$$t^2\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right) + 2tu\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} + \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}\right)$$
$$+ u^2\left(\frac{\cos\psi^2}{a^2} + \frac{\sin\psi^2}{b^2}\right) = 1,$$

$$t^2\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right) - 2tu\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} + \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}\right)$$
$$+ u^2\left(\frac{\cos\psi^2}{a^2} + \frac{\sin\psi^2}{b^2}\right) = 1.$$

Addirt und subtrahirt man diese Gleichungen, so bekommt man statt ihrer:

$$(3) \quad t^2\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right) + u^2\left(\frac{\cos\psi^2}{a^2} + \frac{\sin\psi^2}{b^2}\right) = 1.$$

$$(4) \quad \frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} + \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2} = 0,$$

woraus:

$$(5)\quad \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\psi = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass zu allen Sehnen, für welche $\operatorname{tang}\psi$ dasselbe ist, d. h. zu allen parallelen Sehnen, derselbe Werth von φ, d. h. derselbe Durchmesser gehört; oder:

I. Die Mitten der parallelen Sehnen einer Ellipse liegen auf einem Durchmesser.

Da die Gleichung (5) zwischen $\operatorname{tang}\varphi$ und $\operatorname{tang}\psi$ symmetrisch ist, so muss, wenn die parallelen Sehnen mit der $+x$-Axe den Winkel φ bilden, der sie halbirende Durchmesser den Winkel ψ (oder $180^0+\psi$) machen, d. h.:

II. Zieht man Sehnen, die zu dem in I. erwähnten Durchmesser parallel sind, so werden diese wiederum von einem Durchmesser halbirt, der den in I. erwähnten Sehnen parallel ist.

Zwei Durchmesser LL', MM', von denen jeder die Sehnen halbirt, die dem anderen parallel sind, heissen conjugirte Durchmesser. Von den Winkeln φ und ψ, welche die auf der Seite der positiven Ordinaten befindlichen conjugirten Halbmesser OL, OM mit der $+x$-Axe bilden, ist zufolge (5) der eine nothwendig ein spitzer, in unserer Figur φ, der andere ψ ein stumpfer. Aber auch der Winkel $\psi-\varphi$ ist noch ein stumpfer; denn wegen $\operatorname{tang}\psi = -\dfrac{b^2}{a^2\operatorname{tang}\varphi}$ ist:

$$(6)\quad \operatorname{tang}(\psi-\varphi) = \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\varphi}{1+\operatorname{tang}\psi\operatorname{tang}\varphi} = -\frac{b^2+a^2\operatorname{tang}\varphi^2}{(a^2-b^2)\operatorname{tang}\varphi},$$

also $\operatorname{tang}(\psi-\varphi)$, wenn φ ein spitzer Winkel ist, negativ. Daraus folgt, dass die kleine Axe einer Ellipse durch die stumpfen Winkel zweier beliebigen conjugirten Durchmesser, und die grosse Axe durch die spitzen Winkel derselben geht. — Schreibt man statt (6) die Formel:

$$\operatorname{tang}(\psi-\varphi) = -\frac{b^2\operatorname{cotg}\varphi + a^2\operatorname{tang}\varphi}{a^2-b^2},$$

so sieht man, dass $\operatorname{tang}(\psi-\varphi)$ unendlich wird, entweder wenn $a=b$, oder wenn $a>b$, sobald $\varphi=0$ oder ein Vielfaches von 90^0 ist, d. h. im Kreise stehen zwei conjugirte Durchmesser immer

auf einander senkrecht, in der Ellipse sind nur die beiden Axen auf einander senkrechte conjugirte Durchmesser. — Setzt man $OL = \alpha$, $OM = \beta$, so ist (§. 33, Form. 1):

$$(6^*)\quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2},\quad \frac{1}{\beta^2} = \frac{\cos\psi^2}{a^2} + \frac{\sin\psi^2}{b^2};$$

dadurch verwandelt sich (3) in:

$$\frac{t^2}{\alpha^2} + \frac{u^2}{\beta^2} = 1.$$

Nun sind aber t und u die schiefwinkligen Coordinaten von P für die Coordinatenaxen LL', MM'; folglich:

III. Die Gleichung einer Ellipse, auf die conjugirten Durchmesser 2α und 2β als x- und y-Axen bezogen, ist:

$$(7)\quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Aus den drei Gleichungen (6*) und (4) lassen sich die Winkel φ und ψ eliminiren, und man erhält eine Gleichung zwischen je zwei conjugirten Durchmessern und den Axen der Ellipse. Die erste Gleichung (6*) lässt sich schreiben $\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1-\sin\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2}$, woraus:

$$(7^*)\quad \begin{cases} \alpha^2(a^2-b^2)\sin\varphi^2 = b^2(a^2-\alpha^2), \\ \beta^2(a^2-b^2)\sin\psi^2 = b^2(a^2-\beta^2), \end{cases}$$

und ähnlich:

$$\begin{cases} \alpha^2(a^2-b^2)\cos\varphi^2 = a^2(\alpha^2-b^2), \\ \beta^2(a^2-b^2)\cos\psi^2 = a^2(\beta^2-b^2). \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe in (4) oder in:

$$\frac{\cos\varphi^2\cos\psi^2}{a^4} = \frac{\sin\varphi^2\sin\psi^2}{b^4},$$

so kommt:

$$(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2) = (b^2-\alpha^2)(b^2-\beta^2),$$

oder:

$$a^4 - b^4 - (a^2-b^2)(\alpha^2+\beta^2) = 0,$$

und wenn man durch den nicht verschwindenden Factor a^2-b^2 dividirt:

$$(8)\quad a^2+b^2 = \alpha^2+\beta^2, \text{ d. h.:}$$

IV. Die Summe der Quadrate zweier conjugirten Durchmesser ist constant und der Summe der Quadrate der Axen gleich.

Multiplicirt man die Gleichungen (6*), so kommt mit Hülfe von (§. 22, Form. 6):

$$\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2}+\frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2}\right)^2+\left(\frac{\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi}{ab}\right)^2,$$

welche Gleichung wegen (4) in $\alpha^2\beta^2\sin(\psi-\varphi)^2=a^2b^2$ übergeht. Bezeichnen wir demnach den Winkel zwischen den Durchmessern, der, wenn $\psi>\varphi$, gleich $\psi-\varphi$ ist, mit (α,β), so kommt:

$$(9)\quad \alpha\beta\sin(\alpha,\beta)=ab;$$

in Worten:

V. Das Parallelogramm zwischen zwei conjugirten Durchmessern hat constanten Inhalt und ist dem Rechteck zwischen den Axen gleich.

Anm. Weil $2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2-(\alpha-\beta)^2=a^2+b^2-(\alpha-\beta)^2$, so kann man statt (9) schreiben:

$$(10)\quad \sin(\alpha,\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2-(\alpha-\beta)^2}.$$

Die rechte Seite von (10) erhält, wenn $\alpha=\beta$, den kleinsten Werth; damit $\alpha=\beta$ werde, müssen die conjugirten Durchmesser 2α und 2β gegen die Axen gleich geneigt sein, daraus folgt, dass in (5), wenn φ den spitzen Winkel bedeutet, $\psi=180^0-\varphi$, oder $\tang\psi=-\tang\varphi$ zu setzen ist, also $\tang\varphi=\frac{b}{a}$; ferner folgt aus (8), wenn $\alpha=\beta$, dass $\alpha=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Fassen wir dies zusammen, so sehen wir, dass die Diagonalen des Rechtecks, welches die Scheitel der Ellipse zu Mitten der Seiten hat, die beiden gleichen conjugirten Durchmesser bestimmen, und dass diese unter allen conjugirten Durchmessern den kleinsten Winkel mit einander bilden.

§. 35. Bestimmung der Axen aus zwei conjugirten Durchmessern. Sind 2α und 2β zwei sich gegenseitig halbirende Gerade, w der spitze Winkel, den sie bilden, so giebt es jedesmal eine und nur eine Ellipse, von der diese Geraden conjugirte Durchmesser sind; denn man kann immer und nur auf eine Weise die Geraden a, b,

wo $a > b$ sein möge, und den spitzen Winkel $\varphi < w$ durch die Gleichungen bestimmen (§. 34, Form. 6*, 8, 9):

$$(1)\quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos\varphi^2}{a^2} + \frac{\sin\varphi^2}{b^2};$$

$$(2)\quad a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2;$$

$$(3)\quad ab = \alpha\beta \sin w.$$

Die Gleichungen (2) und (3) geben die Grössen der Axen, denn man hat:

$$a + b = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \sin w} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(90^\circ + w)},$$

weil $\cos(90^\circ + w) = -\sin w$.

$$a - b = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \sin w} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos(90^\circ - w)}.$$

Ist in Fig. 24 Winkel $LOM = w$, $MO = \beta$, $LO = \alpha$, und fällt man von M eine Senkrechte auf OL, trägt auf derselben $MK = MK' = \alpha$ ab, und verbindet K und K' mit O, so ist W. $OMK' = 90^\circ - w$, W. $OMK = 90^\circ + w$, also $OK = a + b$, $OK' = a - b$, woraus sich a und b ergeben.

Um aus (1) den spitzen Winkel φ zu bestimmen, welchen die zwischen LO und MO liegende grosse Axe mit LO oder α bildet, setzen wir $OK = a + b = u$, $OK' = a - b = v$, $KK' = 2\alpha = m$; dadurch verwandelt sich (1) in:

$$(4)\quad \frac{\cos\varphi^2}{(u+v)^2} + \frac{\sin\varphi^2}{(u-v)^2} = \frac{1}{m^2},$$

oder:

$$(5)\quad u^2 + v^2 - 2uv\cos 2\varphi = \left\{\frac{(u+v)(u-v)}{m}\right\}^2.$$

Wenn der mit OK' um O beschriebene Kreis KK' in K' und K'', OK aber und dessen Verlängerung in k' und k'' schneidet (in der Figur sind diese Punkte ausgelassen), so ist:

$$KK' \cdot KK'' = Kk' \cdot Kk'', \quad \text{also:} \quad KK'' = \frac{(u+v)(u-v)}{m}.$$

Demnach ist in Folge von (5) $2\varphi =$ W. $KOK'' = OK''K' - OKK' = K' - K$. Zieht man demnach AO so, dass W. $AOL = \frac{K' - K}{2}$, also $K'OA = 90^\circ - K' + \frac{K' - K}{2} = \frac{180^\circ - K - K'}{2}$, mit anderen

Worten, dass es den W. KOK' halbirt, so ist AO die Richtung der grossen Axe. Dass AO zwischen LO und MO fällt, kommt auf den leicht zu beweisenden Satz zurück, dass in jedem Dreiecke KOK' die Halbirungslinie eines Winkels zwischen der Höhe (OL) und der Transversale (OM) nach der Mitte der Gegenseite liegt.

Der Beweis, aber nicht die Construction, bedarf einer geringen Modification, wenn OL ausserhalb des Dreiecks KOK' fällt.

Anm. Die vorhergehenden Entwickelungen, verbunden mit §. 34, III., zeigen, dass die auf schiefwinklige Coordinaten sich beziehende Gleichung:

$$(6) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

immer eine Ellipse darstellt, für welche die Coordinatenaxen conjugirte Durchmesser sind. In Folge derselben lassen sich einige der in §§. 31 und 32 gegebenen Sätze verallgemeinern; so kommt an Stelle von §. 32, II. folgender Satz:

Fällt man von den Punkten eines Kreises Ordinaten auf einen Durchmesser, verkürzt oder verlängert dieselben nach einem constanten Verhältnisse, und lässt sie sämmtlich um ihre Fusspunkte den Winkel w beschreiben, so dass sie nach der Drehung wieder parallel sind, so liegen die Endpunkte der Ordinaten jetzt in einer Ellipse.

§. 36. Aufgabe. Die Gleichung der Tangente an einem Punkte der Ellipse aufzustellen (vgl. §. 28).

Es sei die Gleichung der Ellipse, auf ein System conjugirter Durchmesser bezogen:

$$(1) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1;$$

und die Gleichung irgend einer durch (x', y') gehenden Geraden:

$$(2) \quad \frac{x-x'}{k} = \frac{y-y'}{l};$$

die Coordinaten eines Durchschnittspunktes von (1) und (2) sind:

$$(3) \quad x = x' + k\varepsilon, \quad y = y' + l\varepsilon,$$

wo ε eine Wurzel der Gleichung ist:

$$(4) \quad \varepsilon^2\left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{\beta^2}\right) + 2\varepsilon\left(\frac{kx'}{\alpha^2} + \frac{ly'}{\beta^2}\right) + \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

Da (4) vom zweiten Grade ist, so haben eine Ellipse und eine Gerade höchstens zwei Punkte gemein. Ist (x', y') ein Ellipsenpunkt, also $\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0$, so verwandelt sich (4) in:

$$(5) \quad \varepsilon\left\{\varepsilon\left(\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{\beta^2}\right) + 2\left(\frac{kx'}{\alpha^2} + \frac{ly'}{\beta^2}\right)\right\} = 0.$$

Hieraus ergeben sich die zwei Werthe von ε:

$$\varepsilon = 0 \quad \text{und:} \quad \varepsilon = -2\frac{\frac{kx'}{\alpha^2} + \frac{ly'}{\beta^2}}{\frac{k^2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{\beta^2}}.$$

Der erste Werth, in (3) eingesetzt, giebt $x = x'$, $y = y'$, d. h. ein Durchschnittspunkt fällt in (x', y'). Damit auch der zweite Durchschnitt in (x', y') falle, oder (2) Tangente werde, muss der zweite Werth von ε auch $= 0$ sein, dies giebt:

$$(6) \quad \frac{kx'}{\alpha^2} + \frac{ly'}{\beta^2} = 0, \quad \text{oder:} \quad \frac{l}{k} = -\frac{\beta^2 x'}{\alpha^2 y'}.$$

Setzt man diesen Werth in (2) oder in $y - y' = \frac{l}{k}(x - x')$ ein, so kommt $y - y' = -\frac{\beta^2 x'}{\alpha^2 y'}(x - x')$, oder: $\alpha^2 yy' + \beta^2 xx' = \alpha^2 y'^2 + \beta^2 x'^2$, woraus $\frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} = \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2}$, und weil (x', y') auf der Ellipse liegt, schliesslich:

$$(7) \quad \frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} = 1;$$

dies ist also die Gleichung der Tangente am Punkte (x', y') der Ellipse.

§. 37. Eigenschaften der Tangente. Nimmt man den durch einen Punkt der Ellipse L (Fig. 23) gehenden Durchmesser als x-Axe, den conjugirten als y-Axe, so wird für den Berührungspunkt $x' = \alpha$, $y' = 0$; also die Gleichung der Tangente (§. 36, Form. 7) $\frac{x}{\alpha} = 1$, oder $x = \alpha$; dies ist aber die Gleichung einer Parallelen zur y-Axe, also:

I. Die Tangente an einem Punkte der Ellipse ist

parallel dem Durchmesser, welcher dem durch den Berührungspunkt gehenden conjugirt ist, also auch den Sehnen, die der letztere halbirt.

II. Die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers sind einander parallel.

Demnach lässt sich §. 34, V. folgendermassen aussprechen:

III. Die Tangenten an den Endpunkten zweier conjugirten Durchmesser bilden ein Parallelogramm von constantem Inhalte.

Die Tangente am Punkte (x', y') schneidet von der x-Axe das Stück $\frac{a^2}{x'}$ ab; derselbe Axenabschnitt gehört zur Tangente am Punkte $(x', -y')$. Die Sehne PP_1, welche zwei Punkte (x', y'), $x', -y')$ verbindet, wird von der x-Axe halbirt, folglich:

IV. Der Durchschnitt R zweier Tangenten liegt auf der Verlängerung des Durchmessers LL', welcher durch die Mitte Q der Berührungssehne geht, und zwar ist $OR = \frac{\overline{OL}^2}{OQ}$, oder R, L, Q, L' sind vier harmonische Punkte (§. 26).

Da OR durch die drei Punkte L, Q, L' schon vollkommen bestimmt ist, so haben wir den Satz:

V. Beschreibt man über der Geraden LL' als Durchmesser zwei beliebige Ellipsen, und zieht durch einen Punkt Q von LL' in jeder Ellipse eine durch LL' halbirte Sehne, so gehen die vier Tangenten an den Endpunkten durch einen Punkt R auf der Verlängerung von LL'.

Anm. Namentlich also treffen sich (Fig. 22) die Tangenten der Ellipse in G und G_3 und die Kreistangenten in D und D_3 in einem Punkte der grossen Axe, so wie die Tangenten in G und D' in einem Punkte der kleinen.

Vier Tangenten an den Endpunkten zweier Durchmesser LL', mm' (Fig. 25) bilden ein Parallelogramm $abcd$. Sind MM', ll' die den Seiten desselben parallelen Durchmesser, ferner $LO = \alpha$, $MO = \beta$ und x', y' die Coordinaten von m in Bezug auf die Axen LL', MM',

so ist die Gleichung von $ab .. \frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} = 1$; die Gleichung von $ad .. x = \alpha$; die Gleichung von $bc .. x = -\alpha$; also die Abscisse von a gleich α, die Ordinate $= \frac{\beta^2}{y'}\left(1 - \frac{x'}{\alpha}\right) = La$; die Abscisse von $b = -\alpha$, die Ordinate $= \frac{\beta^2}{y'}\left(1 + \frac{x'}{\alpha}\right) = L'b$, also $La \cdot L'b$ $= \frac{\beta^4}{y'^2}\left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2}\right)$, oder wegen $1 = \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2}$, $La \cdot L'b = \beta^2 = \overline{OM}^2$; ebenso ist $ma \cdot m'd = \overline{Ol}^2$, und wegen der Congruenz der Vierecke $OmbL'$ und $Om'dL$ ist $m'd = mb$, also $ma \cdot mb = \overline{Ol}^2$; oder:

VI. Werden zwei parallele Tangenten von einer dritten Tangente geschnitten, so ist das Product der Stücke der beiden parallelen Tangenten von den Berührungspunkten an $(La \cdot L'b)$ gleich dem Quadrate des Halbmessers $(\overline{OM}^2)$, der ihnen parallel ist, und das Product der Stücke der dritten Tangente $(ma \cdot mb)$ gleich dem Quadrate des Halbmessers $(\overline{Ol}^2)$, welcher der dritten Tangente parallel ist.

In dem eingeschriebenen Parallelogramme $LmL'm'$ (Fig. 25) ist der Durchmesser, welcher zwei Gegenseiten, z. B. Lm, $L'm'$, halbirt, den beiden anderen parallel; also:

VII. Die Geraden (mL, mL'), welche einen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten eines Durchmessers LL' verbinden, sind zwei conjugirten Durchmessern parallel.

Da b und d auf dem Durchmesser liegen, welcher mL', $m'L$ halbirt (IV.), so ist bd dieser Durchmesser und parallel mL, ebenso ac parallel mL', oder:

VIII. Die Diagonalen eines der Ellipse umschriebenen Parallelogramms bestimmen die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser.

Mit Hülfe von VIII. lässt sich VI. etwas anders aussprechen.

§. 38. Constructionen. Aufgabe I. Den Durchmesser zu construiren, der einem gegebenen conjugirt ist.

Auflösung. Man ziehe eine Sehne, die dem gegebenen Durchmesser parallel ist, dann ist der Durchmesser, der sie halbirt, der verlangte.

Aufgabe II. In einem Punkte L der Ellipse eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. 1) Man bestimme zu dem durch den Berührungspunkt L gehenden Durchmesser den conjugirten, und ziehe durch L eine Gerade, welche ihm parallel ist. 2) Allgemeiner, man ziehe zwei beliebige conjugirte Diameter $(2\alpha,\ 2\beta)$, bestimme in Bezug auf dieselben die Coordinaten von L: x', y', trage auf dem Durchmesser 2α vom Mittelpunkte aus die Distanz, welche die Tangente $\frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} - 1 = 0$ von der x-Axe abschneidet, nämlich $\frac{\alpha^2}{x'}$, ab und verbinde deren Endpunkt mit L. Die Construction von $\frac{\alpha^2}{x'}$ ist ein bekanntes elementares Problem. 3) Man errichte über der grossen Axe einen Kreis (Fig. 22), fälle vom Berührungspunkte G ein Loth auf die Axe, welches den Kreis in D schneidet, ziehe die Kreistangente in D, und verbinde den Punkt, wo diese die grosse Axe trifft, mit G (§. 37, V. Anm.).

Aufgabe III. Von einem Punkte R ausserhalb der Ellipse Tangenten an dieselbe zu ziehen (Fig. 23).

Auflösung. Man ziehe durch R und den Mittelpunkt O eine Gerade, welche mit der Ellipse den Durchmesser LL' bestimmt; auf RO construire man einen Punkt Q so, dass $OQ = \frac{\overline{LO}^2}{RO}$ und ziehe durch Q eine Sehne, welche dem zu LL' conjugirten Durchmesser parallel ist, dann sind ihre Endpunkte die gesuchten Berührungspunkte (§. 37, IV.). Eine Verallgemeinerung dieser Construction bietet der folgende Paragraph.

§. 39. Die Berührungssehne. Es sei $(\xi,\ \eta)$ ein beliebiger Punkt in der Ebene der auf conjugirte Durchmesser bezogenen Ellipse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ist $(x',\ y')$ der Berührungspunkt einer Tangente $\frac{xx'}{\alpha^2} + \frac{yy'}{\beta^2} = 1$, und soll die Tangente durch $(\xi,\ \eta)$ gehen, so ist erforderlich und ausreichend, dass $\frac{\xi x'}{\alpha^2} + \frac{\eta y'}{\beta^2} = 1$ sei; der Berührungspunkt $(x',\ y')$ liegt demnach auf der Geraden:

$$(1)\quad \frac{\xi x}{\alpha^2} + \frac{\eta y}{\beta^2} = 1.$$

Umgekehrt wird die Tangente jedes Ellipsenpunktes, der auf der Geraden (1) liegt, durch den Punkt (ξ, η) gehen, und da (1) die Ellipse im Allgemeinen in zwei Punkten schneidet, so gehen durch (ξ, η) im Allgemeinen zwei Tangenten, und (1) ist die Gleichung der Geraden, welche die Berührungspunkte verbindet, oder die Gleichung der Berührungssehne. Durch Construction ihrer Axenabschnitte kann man sie selbst, und somit die von (ξ, η) an die Ellipse gezogenen Tangenten construiren. — Ist (ξ, η) ein Punkt der Curve, so ist (1) die Gleichung der Tangente. Sind von (ξ, η) aus keine Tangenten an die Curve möglich, so wird dieselbe von der Geraden, deren Gleichung (1) ist, nicht mehr geschnitten; ihre geometrische Bedeutung werden wir später kennen lernen.

Zieht man durch den Punkt J oder (ξ, η) (Fig. 26) eine Parallele zur x-Axe, und schneidet dieselbe die Ellipse in den Punkten (x, η) und $(-x, \eta)$ oder b und d, die Berührungssehne (1) in (ξ', η) oder c, so ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{\xi'\xi}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1,$$

folglich $x^2 = \xi\xi'$, oder, wenn n die Mitte von bd, $\overline{nb}^2 = nc \cdot nJ$; d. h. J, b, c, d sind harmonische Punkte (§. 26). Da nun jede durch J gezogene Gerade einem Durchmesser parallel ist, den man als x-Axe annehmen kann, so haben wir den Satz:

I. Zieht man durch den Durchschnitt J zweier Tangenten eine Secante, so bilden die Schnittpunkte derselben mit der Ellipse, der Schnittpunkt mit der Berührungssehne und der Punkt J vier harmonische Punkte, von denen die beiden letzten so wie die beiden ersten conjugirt sind.

Die Berührungssehnen der Punkte (ξ, η), (ξ, η'), (ξ, η'') .. treffen die x-Axe in einem Punkte, dessen Abscisse $= \frac{\alpha^2}{\xi}$, während die Punkte selbst in einer Parallelen zur x-Axe liegen; man kann aber für jede Gerade AA' (Fig. 27 und 27*) ein Paar conjugirte Durchmesser bestimmen, deren einer MM' der Geraden parallel ist, folglich:

II. Legt man von den Punkten einer Geraden AA' Tangentenpaare an die Ellipse, so schneiden sich die Berührungssehnen sämmtlich in einem Punkte J. Der durch J gezogene Durchmesser LL' trifft, nöthigenfalls verlängert, AA' in einem Punkte H, so dass $OJ.OH = \overline{OL}^2$ ist (d. h. L, L', J, H sind harmonische Punkte), und der AA' parallele Durchmesser ist LL' conjugirt. Schneidet also AA' die Ellipse (Fig. 27*), so ist diese Linie zugleich Berührungssehne von J (§. 37, IV.). Umgekehrt:

III. Legt man durch einen Punkt J Gerade, von welchen jede eine gegebene Ellipse in zwei Punkten trifft, und bestimmt für jedes Punktepaar den Durchschnitt der zugehörigen Tangenten, so ist der Ort desselben eine Gerade AA'; der durch J gehende Durchmesser OL trifft sie in H so, dass $OJ.OH = \overline{OL}^2$, und der OL conjugirte Durchmesser ist AA' parallel; können demnach von J aus Tangenten an die Ellipse gelegt werden, so ist AA' die Berührungssehne.

In der That, legt man durch J die Gerade JFF', und schneidet die Tangente in F die Gerade AA' in H', zieht man ferner von H' eine zweite Tangente, so wird nach dem directen Satze II. ihr Berührungspunkt mit den Punkten J und F in einer Geraden liegen; der Berührungspunkt ist also F'.

Man nennt J den Pol der Geraden AA', und diese die Polare von J.

§. 40. Die Eigenschaften der Brennpunkte (Fig. 28). Wir kehren jetzt zu den Brennpunkten zurück und wollen die Entfernungen derselben von irgend einem Punkte G und einer Tangente der Curve berechnen. Wir bedienen uns wieder des in §§. 31—35 gebrauchten Systems der Hauptaxen. Die Coordinaten von G seien x_1, y_1, die der Brennpunkte F und F' bezüglich $+e$, 0 und $-e$, 0, wo $e^2 = a^2 - b^2$; ferner sei $FG = r$, $F'G = r'$, $OG = \beta$; dann ist:

$$(1)\quad r^2 = (x_1 - e)^2 + y_1^2, \qquad (2)\quad r'^2 = (x_1 + e)^2 + y_1^2,$$

woraus:

$$(2)\quad r^2 - r'^2 = (r + r')(r - r') = -4ex_1.$$

Nun ist:

$$(3)\quad r + r' = 2a, \quad \text{also:} \quad (3^*)\quad r - r' = -\frac{2ex_1}{a},$$

folglich:

$$(4)\quad r = a - \frac{ex_1}{a}, \qquad r' = a + \frac{ex_1}{a}.$$

Setzt man den Werth von r in (1) ein, so kommt man auf die Gleichung der Ellipse. — Es ist sehr merkwürdig, dass, während die Entfernung irgend eines Punktes F von einem Ellipsenpunkte durch eine Quadratwurzel ausgedrückt wird, die Irrationalität verschwindet, wenn F ein Brennpunkt ist.

Wir haben ferner:

$$\beta^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 = b^2 + \frac{e^2}{a^2} x^2$$

und:

$$rr' = a^2 - \frac{e^2}{a^2} x_1^2,$$

also:

$$\beta^2 + rr' = a^2 + b^2.$$

Bezeichnet man aber den dem β conjugirten Halbmesser durch α, so ist (§. 34, Form. 8) $a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2$, also $rr' = \alpha^2$, oder:

I. Das Product der beiden nach einem Ellipsenpunkte G gezogenen Leitstrahlen ist dem Quadrate des Halbmessers gleich, der dem durch G gehenden conjugirt ist.

Sind p und p' die von F und F' auf die Tangente in G gefällten Lothe, H, H' ihre Fusspunkte, (ξ, η) und (ξ', η') die Coordinaten derselben, so ist, weil die Gleichung der Tangente $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$ (nach §. 23, Form. 6 und 7):

$$\xi = e - \frac{x_1}{a^2} \frac{\frac{ex_1}{a^2} - 1}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}, \qquad \eta = -\frac{y_1}{b^2} \frac{\frac{ex_1}{a^2} - 1}{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}},$$

$$p = \pm \frac{\frac{ex_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}.$$

Nun ist:

$$\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}=\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)=\frac{a^4-x_1^2e^2}{a^4b^2}=\frac{rr'}{a^2b^2},$$

und:

$$\frac{ex_1}{a^2}-1=-\frac{r}{a}.$$

Setzen wir diese Werthe ein, so kommt:

$$\xi=e+\frac{x_1}{a^2}\frac{r}{a}\frac{a^2b^2}{rr'}=e+\frac{x_1b^2}{ar'}=\frac{ar'e+x_1b^2}{ar'}=\frac{a^2e+e^2x_1+x_1b^2}{ar'},$$

oder, wenn a^2 für e^2+b^2 gesetzt wird, und man in p den absoluten Werth nimmt:

$$(5)\quad \xi=\frac{a(x_1+e)}{r'},\quad \eta=\frac{ay_1}{r'},\quad p=b\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Um ξ', η', p' zu erhalten, muss man in (5) e, r, r' bezüglich mit $-e$, r', r vertauschen; dies giebt:

$$(6)\quad \xi'=\frac{a(x_1-e)}{r},\quad \eta'=\frac{ay_1}{r},\quad p'=b\sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

Diese Formeln führen zu folgenden Sätzen:

II. Das Product der Lothe (p, p'), welche von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällt werden, ist dem Quadrate (b^2) der halben kleinen Axe gleich.

Ferner ist $\frac{p}{r}=\frac{b}{r}\sqrt{\frac{r}{r'}}=\frac{b}{\sqrt{rr'}}$, und ebenso $\frac{p'}{r'}=\frac{b}{\sqrt{rr'}}$, also $\frac{p}{r}=\frac{p'}{r'}$, also sind die rechtwinkligen Dreiecke FGH und $F'GH'$ einander ähnlich, und W. $FGH=$ W. $F'GH'$, d. h.:

III. Die Tangente bildet mit den Leitstrahlen gleiche Winkel, oder halbirt den Winkel zwischen einem Leitstrahl und der Verlängerung des anderen.

Die Gerade, welche auf der Tangente einer Curve in deren Berührungspunkte senkrecht steht, heisst die Normale der Curve; es folgt demnach aus III.:

IV. Die Normale der Ellipse halbirt den Winkel zwischen den Leitstrahlen.

Die Gleichung der Normale ist:

$$(7)\quad \frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}}.$$

Aus (5) ergiebt sich $OH^2 = \xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{r'^2}\{(x_1 + e)^2 + y_1^2\} = a^2$, folglich:

V. Die Fusspunkte der Lothe, welche man von den Brennpunkten einer Ellipse auf sämmtliche Tangenten fällen kann, liegen in dem Kreise, der die grosse Axe zum Durchmesser hat.

Anm. Der Satz V. beantwortet die Frage: welches ist der Ort der Fusspunkte der von einem Brennpunkte auf alle Tangenten der Ellipse gefällten Lothe? Da es wichtig ist, den Gedankengang zu kennen, welcher bei derartigen Aufgaben verfolgt wird, und weil die Rechnung im gegenwärtigen Falle eine eigenthümliche Schwierigkeit darbietet, so wollen wir die gestellte Frage direct beantworten.

Die Gleichung der Tangente am Punkte (x_1, y_1) ist:

$$(8)\quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0;$$

die Gleichung des vom Brennpunkte F oder $(e, 0)$ auf die Gerade (8) gefällten Lothes ist:

$$(9)\quad \frac{x_1}{a^2} y - \frac{y_1}{b^2}(x - e) = 0.$$

Bestimmt man aus (8) und (9) x und y, so hat man die Coordinaten eines auf der Tangente (8) liegenden Fusspunktes. Offenbar sind x und y von x_1, y_1 abhängig; kann man nun eine von der letzteren Grösse unabhängige Gleichung zwischen x und y finden, so werden derselben alle Fusspunkte genügen, d. h. sie wird die Gleichung des gesuchten Ortes sein. Man muss also aus (8) und (9) x_1 und y_1 eliminiren; dazu bedarf es noch einer dritten Gleichung, und diese ist:

$$(10)\quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Aus (8) und (9) erhält man:

$$x_1 = \frac{a^2(x-e)}{y^2+x(x-e)}, \quad y_1 = \frac{b^2 y}{y^2+x(x-e)},$$

und wenn diese Ausdrücke in (10) eingesetzt werden:

$$(11) \quad a^2(x-e)^2 + b^2 y^2 = \{y^2 + x(x-e)\}^2.$$

Dies ist die Gleichung des gesuchten Ortes, sie steigt auf den vierten Grad, ein Resultat, welches V. zu widersprechen scheint. Setzt man aber:

$$y^2 + (x-e)^2 = u,$$

und demnach:

$$y^2 + x(x-e) = u + e(x-e),$$

so verwandelt sich (11) in:

$$a^2(x-e)^2 + b^2 y^2 = u^2 + 2ue(x-e) + e^2(x-e)^2,$$

und wenn man e^2+b^2 für a^2 setzt, in:

$$0 = u\{u + e(x-e) - b^2\},$$

oder, wenn für u wieder sein Werth geschrieben wird, in:

$$(12) \quad \{(x-e)^2 + y^2\}\{x^2 + y^2 - a^2\} = 0.$$

Der erste Factor wird nur Null, wenn $x = e$, $y = 0$ ist, d. h. für den Brennpunkt F, der, weil er auf keiner reellen Tangente der Ellipse liegt, nicht zum gesuchten Orte gehört; es bleibt also nur $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, d. h. der über der grossen Axe als Durchmesser beschriebene Kreis.

§. 41. Constructionen. Eine einfache Construction der Tangente und Normale, wenn der Berührungspunkt bekannt ist, ergiebt sich aus §. 40, III. und IV.

Soll man von einem Punkte K, ausserhalb der Curve, Tangenten an dieselbe ziehen, so denke man sich eine solche construirt, KG (Fig. 28), verlängere das Loth FH über H hinaus, bis es den verlängerten Leitstrahl $F'G$ in J trifft, dann ist W. $FGH =$ JGH, weil jeder $=$ W. $F'GK$, also sind die rechtwinkligen Dreiecke FGH und JGH congruent, und jeder Punkt der Tangente von F und J gleich weit entfernt, z. B. $KF = KJ$, ausserdem ist noch $F'J = F'G + GF = 2a$. Beschreibt man demnach zwei Kreise, den einen um K mit dem Radius KF, den anderen um F' mit $2a$,

und verbindet ihre Durchschnittspunkte J, J' mit F', so erhält man die Berührungspunkte G, G'.

Eine andere Construction folgt aus §. 40, V. Man beschreibe über der grossen Axe und über KF als Durchmesser zwei Kreise, und verbinde deren Durchschnitte mit K, so werden dies Tangenten der Ellipse sein.

§. 42. Flächeninhalt der Ellipse. Beschreibt man über der grossen Axe AA' (Fig. 29) als Durchmesser einen Kreis, so ist §. 32, II.:

$$\frac{l\lambda}{l\lambda'} = \frac{b}{a}, \quad \frac{m\mu}{m\mu'} = \frac{b}{a}, \quad \text{also:} \quad l\lambda + m\mu = \frac{b}{a}(l\lambda' + m\mu');$$

wir haben ferner:

$$\text{Trapez } l\lambda\mu m = \frac{lm}{2}(l\lambda + m\mu),$$

$$\text{Trapez } l\lambda'\mu' m = \frac{lm}{2}(l\lambda' + m\mu'),$$

folglich:

$$\text{Trapez } l\lambda\mu m : \text{Trapez } l\lambda'\mu' m = b : a.$$

Denkt man sich zwischen λ und ϱ beliebig viele Ellipsenpunkte durch Sehnen verbunden, und eben so zwischen λ' und ϱ' die entsprechenden Kreispunkte, so werden diese Sehnen, die Endordinaten ($l\lambda$, $r\varrho$ und $l\lambda'$, $r\varrho'$) und lr Polygone bilden, die als Summen solcher Trapeze wiederum sich wie b zu a verhalten. Nach bekannter Schlussweise folgert man durch den Uebergang zur Gränze, dass das von lr, den Ordinaten $l\lambda$, $r\varrho$ und dem Ellipsenbogen $\lambda\varrho$ begränzte Flächenstück sich zu dem entsprechenden Kreisstücke $l\lambda'\varrho' r$ wie $b : a$ verhält. Auf die ganze Ellipse angewendet, giebt dies, Ellipse: $a^2\pi = b : a$ oder der Flächeninhalt der Ellipse ist gleich $ab\pi$.

Da $Al\lambda : Al\lambda' = b : a$ und Dreieck $Ol\lambda : Ol\lambda' = b : a$, so verhält sich auch der elliptische Sector $AO\lambda$ zum Kreissector $AO\lambda'$ wie $b : a$.

Anm. Man kann sich statt der ein- auch der umschriebenen Polygonstücke zum Beweise dieser Sätze bedienen. Weil die Tangenten in entsprechenden Punkten λ und λ' sich in einem Punkte T der Axe treffen (§. 37, V.), so sind — wie sich leicht beweisen

lässt — die Durchschnitte α, α' zweier entsprechenden Tangentenpaare auch entsprechend, d. h. ihre Ordinaten αp, $\alpha' p$ fallen auf einander und verhalten sich wie b zu a, also auch die Trapeze $l\lambda\alpha p$, $l\lambda'\alpha' p$, und die Summen solcher Trapeze.

Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel.

§. 43. Der Ort aller Punkte G (Fig. 30), deren Entfernungen GF und GF' von zwei festen Punkten F und F' constante Differenz $= 2a$ haben, heisst eine Hyperbel; die festen Punkte F und F' nennt man die Brennpunkte, ihre Entfernung $FF' = 2e$ die Excentricität, und zwei Geraden GF und GF' zwei Radien-Vectoren oder Leitstrahlen. — Da in jedem Dreiecke GFF' die Differenz zweier Seiten $GF - GF'$ (oder $GF' - GF$) kleiner als die dritte Seite FF' sein muss, so ist $a < e$.

Aufgabe. Die Gleichung der Hyperbel aufzustellen.

Die Mitte O von FF' sei der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten, OF die positive x-Axe, dann ist für den Punkt G oder (x, y):

$$GF = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}, \qquad GF' = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}.$$

Nun ist für positive Werthe von x immer $(x-e)^2 < (x+e)^2$, also $GF < GF'$; für negative, $(x-e)^2 > (x+e)^2$, also $GF > GF'$; die analytische Definition der Hyperbel ist demnach:

$$(1) \quad \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

je nachdem x einen $\pm$ Werth hat.

Macht man (1) rational, so kommt man, wie in §. 31, 5, auf $a^2(a^2 - e^2) = x^2(a^2 - e^2) + y^2 a^2$, was, weil $a^2 - e^2$ negativ ist, besser:

$$(2) \quad a^2(e^2 - a^2) = x^2(e^2 - a^2) - y^2 a^2,$$

geschrieben wird; setzt man:

$$(3) \quad e^2 - a^2 = b^2, \quad \text{oder:} \quad (3^*) \quad e^2 = a^2 + b^2,$$

so wird die Hyperbelgleichung:

$$(4)\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Da (4) nur x^2 und y^2 enthält, so besteht die Curve aus vier congruenten Quadranten (§. 31, Zus. 2), und es wird hinreichen, die Gestalt desjenigen, in welchem x und y positiv sind, zu untersuchen. Schreibt man statt (4):

$$(5)\quad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{und:} \quad (6)\quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}},$$

so folgt aus (5), dass x wenigstens $= a$ sein muss, damit y reell werde, über a hinaus aber jeden beliebig grossen Werth annehmen kann; und dass $y = 0$, wenn $x = a$, mit x selbst aber ins Unbegränzte wächst; der Curvenquadrant erstreckt sich demnach ins Unendliche. Der Bruch $\frac{y}{x}$ ist nach (6) stets kleiner als $\frac{b}{a}$, nähert sich aber diesem Werthe immer mehr, je grösser x, also auch y wird; macht man daher $OA = a$, $AP = b = \sqrt{e^2 - a^2}$, wodurch $\operatorname{tang} POA = \frac{b}{a}$, und erwägt, dass $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} GOH$, so ergiebt sich, dass der Radius OG, während G auf der Curve sich immer weiter entfernt, immer mehr der Richtung OP sich nähert. Setzt man $HG' = Y$, so ist wegen $OH = x$, $\frac{Y}{x} = \frac{b}{a}$ oder $Y^2 = x^2\frac{b^2}{a^2}$, und für den Hyperbelpunkt G ist $y^2 = x^2\frac{b^2}{a^2} - b^2$, also $Y^2 - y^2 = b^2$, oder $Y - y = \frac{b^2}{Y + y}$; da mit zunehmendem x die Ordinaten Y und y über alle Gränzen wachsen, so wird $Y - y$ oder $G'G$ kleiner als jede beliebige Grösse, ohne jedoch je $= 0$ zu werden; der Hyperbelquadrant nähert sich also immer mehr der Geraden OP und kommt ihr beliebig nahe *), ohne sie jedoch je zu erreichen. — Die Anwendung derselben Betrachtungen auf die übrigen Quadranten ergiebt folgendes Resultat:

---

*) D. h. wenn man sich zwischen der Curve und OP eine Parallele zu OP gezogen denkt, so tritt die Curve in den Raum zwischen beide Parallelen, wie klein auch die Entfernung derselben genommen werde.

Trägt man von der Mitte O (Fig. 30*) der Excentricität FF' die Distanz $OA = OA'$ ab, so geht die Hyperbel durch A und A'; errichtet man ferner in A und A' zwei unbegränzte Lothe zu FF', so liegt zwischen ihnen kein Hyperbelpunkt. Treffen diese Lothe den über FF' als Durchmesser beschriebenen Kreis in P, P_1, P_2, P_3, so dass $AP = \sqrt{e^2 - a^2} = b$, und zieht man die unbegränzten durch O gehenden Geraden PP_2, P_1P_3, so liegt in dem unendlichen Raume pPP_3p_3 ein unendlicher Hyperbelzweig und in $p_1P_1P_2p_2$ der andere; beide zusammen bilden die durch (4) dargestellte Hyperbel. Die Punkte A, A' sind die Scheitel, AA' die Hauptaxe der Curve; die Geraden pp_2, p_1p_3, welche sich der Hyperbel immer mehr nähern, so dass ihre Entfernung von der Curve beliebig klein, aber nie $= 0$ wird, heissen die Asymptoten; die Gleichung der einen (pp_2) ist $y = \frac{b}{a}x$, die der anderen (p_1p_3) ist $y = -\frac{b}{a}x$, oder bezüglich:

$$(7) \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Eine Hyperbel heisst gleichseitig, wenn $b = a$; das Dreieck POA (Fig. 30*) wird für dieselbe gleichschenklig, also W. $POA = 45^0$, und W. $POP_3 = 90^0$; der Asymptotenwinkel der gleichseitigen Hyperbel ist demnach ein rechter.

§. 44. Unendliche Wurzeln einer quadratischen Gleichung, directe Bestimmung der Asymptoten, Tangenten.

Denkt man sich in der quadratischen Gleichung:

$$(1) \quad Lu^2 + 2Mu + N = 0$$

die Coefficienten veränderlich, so ändern sich auch mit ihnen die Wurzeln u_1 und u_2, wo:

$$u_1 = \frac{-M - \sqrt{M^2 - LN}}{L}, \qquad u_2 = \frac{-M + \sqrt{M^2 - LN}}{L}.$$

Um zu sehen, was aus diesen Werthen wird, wenn erstens L, zweitens L und M gleich Null werden, schaffen wir die Wurzelgrössen aus den Zählern fort, und erhalten:

$$u_1 = \frac{\left(-M - \sqrt{M^2 - LN}\right)\left(-M + \sqrt{M^2 - LN}\right)}{L\left(-M + \sqrt{M^2 - LN}\right)} = \frac{N}{-M + \sqrt{M^2 - LN}}$$

und ähnlich:

$$u_2 = \frac{N}{-M-\sqrt{M^2-LN}}.$$

Wenn $L=0$, muss M statt $\sqrt{M^2-LN}$ gesetzt werden und es kommt $u_1 =$ unendlich, $u_2 = -\frac{N}{2M}$; die eine Wurzel von (1) wird also, wenn L verschwindet, unendlich, während die andere den Werth $-\frac{N}{2M}$ bekommt. Ist auch $M=0$, so wird u_2 ebenfalls unendlich und u_1 und u_2 sind als gleich anzusehen; in der That wird die Bedingung, dass (1) zwei gleiche Wurzeln habe, nämlich $LN-M^2=0$, durch die Annahme $L=0$, $M=0$ befriedigt.

Zu demselben Resultate kann man gelangen, ohne (1) aufzulösen; setzt man in (1) $u=\frac{1}{v}$, so wird aus (1):

$$(2) \quad L+2Mv+Nv^2=0.$$

Heissen v_1, v_2 die Wurzeln von (2), so ist $u_1=\frac{1}{v_1}$, $u_2=\frac{1}{v_2}$. Wenn $L=0$, so wird (2) $2Mv+Nv^2=0$, also $v_1=0$, $v_2=-\frac{2M}{N}$, also $u_1=$ unendlich, $u_2=-\frac{N}{2M}$; wenn $L=0$ und $M=0$, so wird (2) $Nv^2=0$, also $v_1=v_2=0$, und $u_1=u_2=$ unendlich, wie vorhin.

Jede Gleichung $2Mu+N=0$ kann demnach als eine quadratische mit einer unendlichen Wurzel, und $N=0$ als eine quadratische Gleichung mit zwei gleichen unendlichen Wurzeln betrachtet werden *).

Wir wollen jetzt die Fälle untersuchen, wo von den Durchschnitten einer Geraden und einer Hyperbel:

$$(3) \quad lx+my+n=0, \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

*) Auf ganz analoge Weise lässt sich darthun, dass wenn in einer Gleichung dritten Grades der Coefficient des höchsten Gliedes verschwindet, die Gleichung eine unendlich grosse Wurzel hat u. s. w., und dass umgekehrt eine quadratische Gleichung als eine cubische Gleichung mit einer unendlichen, als eine biquadratische mit zwei unendlichen Wurzeln u. s. w. angesehen werden kann. H.

der eine oder beide ins Unendliche fallen. Die Abscissen dieser Durchschnitte sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(4)\quad \left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{l^2}{b^2}\right)x^2-\frac{2ln}{b^2}x-\left(\frac{n^2}{b^2}+m^2\right)=0;$$

die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit eine dieser Wurzeln unendlich werde, ist $\frac{m^2}{a^2}-\frac{l^2}{b^2}=0$, d. h. $\frac{l}{m}$ entweder $=\frac{b}{a}$ oder $=-\frac{b}{a}$; die Gerade (3) muss demnach einer der Asymptoten (§. 43, Form. 7) parallel sein. Sollen beide Wurzeln von (4) unendlich werden, so muss auch $\frac{ln}{b^2}=0$, d. h. $n=0$ sein. Für $\frac{l}{m}=\pm\frac{b}{a}$ und $n=0$ wird aber (3) die Gleichung einer Asymptote; wir haben also das Resultat:

Es giebt für die Hyperbel zwei und nicht mehr Gerade, die Asymptoten, von denen eine jede zwei zusammenfallende, unendlich entfernte Schnittpunkte mit der Curve gemein hat. Gerade, die einer Asymptote parallel sind, und nur solche, haben mit der Hyperbel einen endlich und einen unendlich entfernten Schnittpunkt gemein.

Da die beiden unendlich entfernten Schnittpunkte einer Asymptote und einer Hyperbel zusammenfallen, so ist jede Asymptote als Tangente an einem unendlich entfernten Punkte anzusehen. In der That, ist (x', y') ein Hyperbelpunkt, so erhält man durch dieselbe Rechnung wie bei der Ellipse (§. 36) als Gleichung der Tangente:

$$(5)\quad \frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1,\quad \text{oder:}\quad (6)\quad \frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}\frac{y'}{x'}=\frac{1}{x'}.$$

Mit wachsendem x' und y' nähert sich $\frac{y'}{x'}$ dem Werthe $+\frac{b}{a}$ (§. 43), wenn (x', y') im ersten oder dritten Quadranten liegt, und dem Werthe $-\frac{b}{a}$, wenn (x', y') in einem der beiden anderen Quadranten liegt. Entfernt sich also (x', y') ins Unendliche, so muss in (6) $\frac{1}{x'}=0$, $\frac{y'}{x'}=\pm\frac{b}{a}$ gesetzt werden, d. h. geht (6) in $\frac{x}{a^2}\mp\frac{y}{b^2}\frac{b}{a}=0$ oder in die Gleichungen der Asymptoten über (§. 43, 7).

Anm. Jede Gerade, die mit einer algebraischen Curve zwei zusammenfallende, unendlich entfernte Punkte gemein hat, also als

Tangente an einem unendlich entfernten Berührungspunkte angesehen werden kann, heisst eine **Asymptote** der algebraischen Curve; man kann beweisen, dass die Asymptote einem Curvenzweige beliebig nahe kommt, ohne ihn je zu erreichen.

§. 45. **Eigenschaften der Asymptoten.** Das Product $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$ verschwindet nur für solche Werthe von x und y, für welche einer der Factoren $=0$ wird, also nur für Punkte der Asymptoten; demnach stellt:

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

beide Asymptoten zusammen dar, oder sie ist die Gleichung des **Systems** beider Asymptoten. Die Gerade:

$$(2)\quad lx+my+n=0,$$

schneidet (1) in zwei Punkten, deren Abscissen X_1 und X_2 Wurzeln der Gleichung sind:

$$(3)\quad \left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{l^2}{b^2}\right)x^2-\frac{2ln}{b^2}x-\frac{n^2}{b^2}=0;$$

während die Abscissen x_1, x_2 der Durchschnitte von (2) und der Hyperbel durch die Gleichung (§. 44, Form. 4) gegeben sind. Da beide Gleichungen nur in dem von x freien Gliede verschieden sind, so ist:

$$(4)\quad X_1+X_2=x_1+x_2=\frac{2ln}{b^2\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{l^2}{b^2}\right)}.$$

Sind Y_1, Y_2, y_1, y_2 die zugehörigen Ordinaten, so beweist man ebenso, dass $Y_1+Y_2=y_1+y_2$. Demnach ist die Mitte $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ der durch (2) bestimmten Hyperbelsehne zugleich die Mitte der durch (2) bestimmten Asymptotensehne, oder:

I. **Schneidet eine Gerade die Hyperbel (Fig. 31) in C, C' und die Asymptoten in D, D', so haben CC', DD' dieselbe Mitte, d. h. ist $DC=D'C'$, und $DC'=D'C$.**

Wird die Sehne (2) Tangente, so fallen ihre Schnittpunkte

mit der Curve und ihr Mittelpunkt in den Berührungspunkt, und nach I. ist $HE = HE'$, oder:

II. **Der Berührungspunkt H einer Tangente halbirt das von den Asymptoten begränzte Stück EE' derselben.**

Aus II. ergiebt sich eine einfache Construction der Tangente. Durch die Asymptoten PO, P_1O (Fig. 32) und einen Punkt C der Hyperbel ist dieselbe vollkommen und eindeutig bestimmt; denn sind x und y die auf die Halbirungslinien der Asymptotenwinkel bezogenen Coordinaten von C, so geben die Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, und $\frac{b}{a} = \operatorname{tang} \frac{1}{2} POP_1$ die Werthe von b und a. Zieht man durch C beliebige Gerade CAA' und macht $A'C' = AC$, so gehören alle diese Punkte C' zu einer Hyperbel.

Fällt man von dem Hyperbelpunkte (x', y') oder H (Fig. 31) Lothe auf die Asymptoten $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, so sind dieselben (§. 23, Form. 7):

$$= \pm \frac{\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \quad \text{und:} \quad = \pm \frac{\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},$$

also ihr Product:

$$= \frac{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Zieht man HN, HN' den Asymptoten parallel, und ist w der Asymptotenwinkel, so sind jene beiden Lothe $HN \sin w$, $HN' \sin w$, also $HN \cdot HN' \sin w^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$; nun ist:

$$\sin w = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{w}{2}}{1 + \operatorname{tang} \frac{w^2}{2}} = \frac{2 \frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

folglich:

$$HN \cdot HN' = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

mit anderen Worten:

III. Betrachtet man die Asymptoten als schiefwinklige Axen und nimmt die Winkel, in welchen die Hyperbel liegt, zum ersten und dritten Quadranten, so ist die Gleichung der Curve:

$$(5) \quad xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Weil für die Tangente H die Mitte von EE', ist auch $HN = \frac{1}{2}OE'$ $HN' = \frac{1}{2}OE$, also nach dem Obigen:

$$\tfrac{1}{4}OE \cdot OE' \sin w^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

und wegen $\sin w = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$:

$$\tfrac{1}{2}OE \cdot OE' \sin w = ab, \text{ d. h.:}$$

IV. Jede Tangente bestimmt mit den Asymptoten ein Dreieck von constantem Inhalt $= ab$.

§. 46. Durchmesser der Hyperbel; conjugirte Hyperbeln. Eine durch den Mittelpunkt gezogene Gerade und eine Hyperbel:

$$(1) \quad y = \operatorname{tang}\varphi \cdot x, \qquad (2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

schneiden sich in Punkten, deren Coordinaten sind:

$$(3) \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tang}\varphi^2}{b^2}}}, \qquad y = \pm \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tang}\varphi^2}{b^2}}}.$$

Für die Entfernung $2d$ dieser Schnittpunkte ergiebt sich:

$$(4) \quad d^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 + \operatorname{tang}\varphi^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{\operatorname{tang}\varphi^2}{b^2}} = \frac{1}{\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}}.$$

Die Werthe von x, y und d werden unendlich, wenn $\operatorname{tang}\varphi = \pm \dfrac{b}{a}$,

d. h. für die Asymptoten, und imaginär, wenn der numerische Werth von $\operatorname{tang}\varphi > \frac{b}{a}$ ist, d. h. wenn (1) in denjenigen Asymptotenwinkeln liegt, in welchen die y-Axe sich befindet. Man nennt jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade (1) einen Durchmesser der Hyperbel, einen reellen, wenn sie die Curve wirklich schneidet, einen Nebendurchmesser, wenn sie dieselbe nicht trifft. Man legt dem letzteren — um gewisse Sätze bequem aussprechen zu können — ebenfalls eine Länge bei $= 2\sqrt{-\frac{1}{\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}}}$, wo die Grösse unter der Wurzel positiv ist, weil für einen Nebendurchmesser $\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2} = \frac{\cos\varphi^2}{b^2}\left(\frac{b^2}{a^2} - \operatorname{tang}\varphi^2\right)$ negativ ist. Der y-Axe entspricht der Winkel $\varphi = 90^0$, also ist der zu ihr gehörende Nebendurchmesser $= 2b = BB'$ (Fig. 30*); diese Gerade heisst die Nebenaxe der Hyperbel.

Trägt man auf der die Curve nicht schneidenden Geraden gg' (Fig. 30*) $Og = Og' = \sqrt{-\frac{1}{\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}}} = d$ ab, und sind x, y die Coordinaten von g, so ist:

$$x = d\cos\varphi, \quad y = d\sin\varphi, \quad \frac{1}{d^2} = -\left\{\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right\},$$

oder:

$$1 = \frac{d^2\sin\varphi^2}{b^2} - \frac{d^2\cos\varphi^2}{a^2}, \quad \text{woraus:} \quad 1 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}.$$

Die Endpunkte g, g' eines jeden Nebendurchmessers liegen also auf einer Hyperbel, deren Haupt- und Nebenaxe resp. die Neben- und Hauptaxe der gegebenen Curve sind. (In Fig. 30* ist dieselbe punctirt gezeichnet; ihre Brennpunkte sind f und f', ihre Asymptoten die der gegebenen Curve.) Zwei solche Hyperbeln, von denen die reellen Durchmesser der einen die Nebendurchmesser der anderen sind, heissen conjugirte.

Anm. Eine dem Durchmesser (1) parallele Gerade:

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi + n = 0$$

hat mit der Hyperbel (2) zwei Punkte gemein, deren Abscissen x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\left(\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{2n\sin\varphi}{b^2}x - \left(\frac{n^2}{b^2} + \cos\varphi^2\right) = 0$$

(vgl. §. 44, Form. 4). Hieraus folgt:

$$x_1 x_2 = -\frac{\frac{n^2}{b^2} + \cos\varphi^2}{\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}};$$

nun ist für einen reellen Durchmesser (1) der Nenner positiv, also $x_1 x_2$ negativ, d. h. x_1 und x_2 sind reell und haben entgegengesetzte Zeichen. Ist aber (1) ein Nebendurchmesser, so ist der Nenner negativ, also $x_1 x_2$ positiv; d. h. entweder sind x_1 und x_2 reelle Grössen mit demselben Zeichen oder zusammengehörige imaginäre Werthe (d. h. $x_1 = A + B\sqrt{-1}$, $x_2 = A - B\sqrt{-1}$, woraus $x_1 x_2 = A^2 + B^2$). Jede Gerade also, die einem reellen Durchmesser parallel ist, schneidet beide Hyperbelzweige; ist sie einem Nebendurchmesser parallel, so schneidet (berührt) sie entweder einen Hyperbelzweig, oder trifft die Curve gar nicht.

§. 47. Conjugirte Durchmesser; Constructionen. Es sei (Fig. 33) LL' der Durchmesser, der die Sehne PP' in Q halbirt; wir setzen $OQ = t$, $PP' = 2u$, die Winkel, welche die Richtung des positiven x mit t und dem oberen Theile von PP' bildet, bezüglich gleich φ und ψ, dann erhält man genau ebenso wie in §. 34 für die Ellipse:

$$(1)\quad t^2\left\{\frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2}\right\} + u^2\left\{\frac{\cos\psi^2}{a^2} - \frac{\sin\psi^2}{b^2}\right\} = 1,$$

$$(2)\quad \frac{\cos\varphi\cos\psi}{a^2} - \frac{\sin\varphi\sin\psi}{b^2} = 0,$$

woraus:

$$(3)\quad \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2}.$$

Aus (2) und (3) ergiebt sich ebenso, wie bei der Ellipse, folgender Satz, der auch aus §. 45, I. abgeleitet werden könnte:

I. Die Mitten paralleler Sehnen liegen in einem Durchmesser, und alle diesem letzteren parallelen Seh-

nen haben ihre Mitten in einem zweiten Durchmesser, welcher der ersten Schaar Sehnen parallel ist. — Zwei Durchmesser, von denen jeder die Sehnen halbirt, die dem anderen parallel sind, heissen conjugirte.

Aus (3) kann man zu jedem Durchmesser die Richtung des conjugirten bestimmen; dieselbe Gleichung lehrt, dass $\operatorname{tang}\varphi$ und $\operatorname{tang}\psi$ nicht gleichzeitig numerisch kleiner (grösser) als $\frac{b}{a}$ sein können, weil sonst ihr Product kleiner (grösser) als $\frac{b^2}{a^2}$ wäre, also ist numerisch $\operatorname{tang}\varphi \gtreqless \frac{b}{a}$, wenn $\operatorname{tang}\psi \lesseqgtr \frac{b}{a}$ ist, d. h. von zwei conjugirten Durchmessern ist der eine ein reeller, der andere ein Nebendurchmesser, und jede Asymptote ist sich selbst conjugirt.

Nehmen wir an, dass der PP' halbirende Durchmesser LL' ein reeller, also $\operatorname{tang}\varphi$ numerisch $< \frac{b}{a}$ sei, und setzen $LL' = 2\alpha$, den conjugirten Nebendurchmesser MM', welcher der Sehne PP' parallel ist, $= 2\beta$, so ist nach §. 46:

$$(4) \quad \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\cos\varphi^2}{a^2} - \frac{\sin\varphi^2}{b^2},$$

$$(5) \quad \frac{1}{\beta^2} = -\left\{\frac{\cos\psi^2}{a^2} - \frac{\sin\psi^2}{b^2}\right\};$$

dadurch verwandelt sich (1) in $\frac{t^2}{\alpha^2} - \frac{u^2}{\beta^2} = 1$. Nun sind t und u oder OQ und PQ die schiefwinkligen Coordinaten von P in Bezug auf OL und OM als Axen; also haben wir den Satz:

II. Die Gleichung der Hyperbel bezogen auf einen reellen Durchmeser 2α als x-Axe und auf den conjugirten Nebendurchmesser 2β als y-Axe ist:

$$(6) \quad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Durch eine wörtliche, auf (6) angewendete Wiederholung des Verfahrens in §. 44 ergeben sich die Gleichungen der Asymptoten, auf dieselben Axen bezogen:

$$(7) \quad \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0, \qquad \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 0.$$

Die Tangenten in L und L' sind dem conjugirten Durchmesser MM' parallel, wie sich z. B. durch eine einfache Gränzbetrachtung aus Satz I. ergiebt. Nun sind NL und OL $(= \alpha)$ die schiefwinkligen Coordinaten des Asymptotenpunktes N, die einer Gleichung (7) genügen, der ersten, wenn OL und OM die positiven Halbaxen bedeuten, also ist $\frac{\alpha}{\alpha} - \frac{NL}{\beta} = 0$, d. h. $NL = \beta$, $NN' = 2\beta$ oder:

III. Das von den Asymptoten begränzte Stück einer Tangente ist dem ihr parallelen Nebendurchmesser gleich.

Weil ferner RQ, OQ die schiefwinkligen Coordinaten von R, PQ, OQ die von Q sind, so ist $\frac{OQ}{\alpha} - \frac{RQ}{\beta} = 0$, $\frac{OQ^2}{\alpha^2} - \frac{PQ^2}{\beta^2} = 1$, woraus $RQ^2 - PQ^2 = \beta^2 = (RQ + PQ)(RQ - PQ)$, oder wegen $RQ = R'Q$, $\beta^2 = R'P \cdot RP$. Ebenso findet man, wenn $P'SS'$ dem Durchmesser LL' parallel ist, $\alpha^2 = S'P' \cdot SP'$; d. h.:

IV. Zieht man durch einen Hyperbelpunkt P eine Transversale, welche die Asymptoten in zwei Punkten trifft, so ist das Product ihrer Entfernungen von P dem Quadrate des der Transversale parallelen Halbmessers gleich. — Ein specieller Fall dieses Satzes ist III.

Sind also ein Hyperbelpunkt P und die Asymptoten gegeben, so kann man mit Hülfe von IV. beliebig viele Durchmesser, und namentlich auch die Axen $2a$ und $2b$ finden.

Sind (Fig. 34) zwei in O sich halbirende conjugirte Durchmesser, der reelle LL' und der Nebendurchmesser MM', gegeben, so sind zwei durch L und L' mit MM' parallel gezogene Gerade zwei Tangenten der Curve, und macht man auf einer der Parallelen $LN = LN' = OM$, so sind nach III. ON und ON' die beiden Asymptoten. Da nun auch noch der Hyperbelpunkt L bekannt ist, so lässt sich nach dem Vorhergehenden Richtung und Grösse der Axen leicht bestimmen.

Durch eine ganz ähnliche Rechnung wie in §. 34, in welcher nur $-b^2$ und $-\beta^2$ statt b^2 und β^2 gesetzt werden, findet man $a^2 - b^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $ab = \alpha\beta \sin(\alpha, \beta)$, d. h.:

V. Für einen reellen Halbmesser α und seinen conjugirten Nebenhalbmesser β ist die Differenz der Qua-

drate, so wie das von ihnen bestimmte Parallelogramm constant.

Der letzte Theil dieses Satzes ist nur eine andere Aussage von §. 45, IV., weil (Fig. 34) Parallelogramm $MOLN =$ Dreieck NON'.

§. 48. Brennpunkte. Die — bis auf ein Vorzeichen — vollkommene Uebereinstimmung der Ellipsen- und Hyperbelgleichung hat zur Folge, dass die über die Tangenten, Berührungssehnen u. s. w. der Ellipse gefundenen Sätze unverändert, oder wenigstens mit geringen, leicht aufzufindenden Modificationen, welche sich meist auf die Lage einzelner Stücke der Figur beziehen, auch für die Hyperbel gelten. So bildet z. B. die Tangente mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen gleiche Winkel, aber sie halbirt den Winkel zwischen den Leitstrahlen selbst und nicht, wie bei der Ellipse, den Nebenwinkel desselben. In der That, der Durchschnitt der Tangente $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 1$ mit der x-Axe hat die Abscisse $\frac{a^2}{x'}$, welcher, weil $\frac{a}{x'}$ numerisch $\leqq 1$, ebenfalls numerisch $\leqq a$ ist; d. h. der Durchschnitt der Tangente liegt zwischen den Scheiteln, also um so mehr zwischen den Brennpunkten, folglich liegt auch die Tangente zwischen den Leitstrahlen. — Sind also eine Ellipse und eine Hyperbel um dieselben Brennpunkte beschrieben, so ist in ihren Durchschnittspunkten die Tangente der einen Curve Normale der anderen.

Ist (Fig. 30), wie in §. 43, $FG = r$, $F'G = r'$, so hat man:

$$r^2 = (x-e)^2 + y^2, \quad r'^2 = (x+e)^2 + y^2, \quad r'^2 - r^2 = 4ex.$$

Nun ist für den Hyperbelzweig mit positiven Abscissen $r' - r = 2a$, also $r' + r = \frac{2ex}{a}$, wodurch:

$$(1) \quad r = \frac{ex}{a} - a, \quad r' = \frac{ex}{a} + a.$$

Dagegen ist für den anderen Zweig $r - r' = 2a$, also $r + r' = -\frac{2ex}{a}$ und:

$$(2) \quad r = a - \frac{ex}{a}, \quad r' = -a - \frac{ex}{a}.$$

§. 49. Leitlinien der Ellipse und Hyperbel. Die letzten Formeln, so wie die ähnlichen (§. 40, Form. 4) für die Ellipse, führen zu einer gleichmässigen Entstehungsweise beider Curven.

Für den Ellipsenpunkt G (Fig. 35) hatten wir gefunden (§. 40, Form. 4):

$$FG = r = a - \frac{ex}{a} = \frac{e}{a}\left(\frac{a^2}{e} - x\right).$$

Trägt man von O aus auf der grossen Axe das Stück $OL = \frac{a^2}{e}$ auf, welches grösser ist als a, weil $e < a$, zieht ff durch L senkrecht zu OL, und fällt von G auf ff die Senkrechte GH, so ist, wo auch G auf der Ellipse liegen mag, $GH = JL = \frac{a^2}{e} - x$, also nach dem Obigen:

$$\frac{GF}{GH} = \frac{e}{a}.$$

Die Gerade ff heisst eine Leitlinie oder Directrix der Ellipse; da $OF \cdot OL$ gleich dem Quadrate des Halbmessers (a^2) ist, auf dem F und L liegen, und ff dem Durchmesser parallel, der $2a$ conjugirt ist (nämlich der kleinen Axe), so ist (§. 39, III.) ff die Polare des Brennpunktes F, und die Tangenten an den Endpunkten irgend einer durch F gelegten Sehne schneiden sich auf ff. Zu dem Brennpunkte F' gehört die Leitlinie $f'f'$ und wir haben nach (1) den Satz:

I. Die Entfernungen eines Ellipsenpunktes von dem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie stehen in constantem Verhältnisse, nämlich in dem der Excentricität zur grossen Axe.

Derselbe Satz gilt auch für die Hyperbel (Fig. 36); denn macht man $OL = \frac{a^2}{e}$, wo $\frac{a^2}{e} < a$, weil $\frac{a}{e} < 1$ und zieht ff durch L senkrecht zu OF, so wie von einem Curvenpunkte G (oder G'), GH (oder $G'H'$) senkrecht zu ff, so ist:

$$GH = JO - LO = x - \frac{a^2}{e},$$

$$GF = r = \frac{ex}{a} - a = \frac{e}{a}\left(x - \frac{a^2}{e}\right) \text{ (§. 48, Form. 1);}$$

$$G'H' = J'O + OL = -x + \frac{a^2}{e},$$

$$G'F = r = a - \frac{ex}{a} = \frac{e}{a}\left(-x + \frac{a^2}{e}\right) \text{ (§. 48, Form. 2)};$$

also:

$$\frac{GH}{GF} = \frac{G'H'}{G'F} = \frac{e}{a}.$$

Umgekehrt:

II. Der Ort aller Punkte G, für welche die Entfernungen von einem gegebenen Punkte F (Fig. 37) und einer gegebenen Geraden ff ein constantes Verhältniss λ haben, ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem λ $\left(\text{oder } \frac{GF}{GH}\right)$ kleiner oder grösser als 1 ist.

Denn es sei ff die Ordinatenaxe, das Loth FL von F auf diese Linie die x-Axe, F habe die positive Abscisse h, so ist $GH = \pm x$, je nachdem G und F auf derselben, oder auf verschiedenen Seiten von ff liegen, und $GF = \{(x-h)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}}$; also ist die Gleichung des gesuchten Ortes:

(1) $x^2 - 2xh + h^2 + y^2 = \lambda^2 x^2$, oder: $x^2(1-\lambda^2) - 2xh + y^2 = -h^2$,

welche man in:

$$x^2 - 2x\frac{h}{1-\lambda^2} + \frac{h^2}{(1-\lambda^2)^2} + \frac{y^2}{1-\lambda^2} = -\frac{h^2}{1-\lambda^2} + \frac{h^2}{(1-\lambda^2)^2}$$
$$= \frac{h^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$$

und schliesslich in:

$$(2) \quad \left(x - \frac{h}{1-\lambda^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\lambda^2} = \frac{h^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$$

umformt. Verschiebt man die y-Axe, so dass der neue Anfangspunkt O im alten Systeme die Abscisse $\frac{h}{1-\lambda^2}$ hat, so bleiben die Ordinaten ungeändert, und die neuen Abscissen, wir wollen sie X nennen, ergeben sich aus den alten durch die Relation $X = x - \frac{h}{1-\lambda^2}$ (§. 2). Ist ferner A eine positive Grösse, deren Quadrat $A^2 = \frac{h^2\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$ ist, so verwandelt sich (2) in:

$$(3)\quad X^2 + \frac{y^2}{1-\lambda^2} = A^2.$$

Bezeichnet man das X des Punktes F mit E, so ist:

$$E = -\frac{\lambda^2 h}{1-\lambda^2}, \quad \frac{E^2}{A^2} = \lambda^2, \quad A^2(1-\lambda^2) = A^2 - E^2.$$

Dadurch geht (4) in:

$$(5)\quad \frac{X^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 - E^2} = 1$$

über. Diese Gleichung stellt eine Ellipse oder Hyperbel vor, je nachdem $A^2 \gtrless E^2$, d. h. $\lambda \lessgtr 1$ ist. In beiden Fällen findet man für die Excentricität von (5) den absoluten Werth von $2E$, also ist F einer der Brennpunkte der Curve.

Nur wenn $\lambda = 1$, lassen sich die Transformationen, durch welche man von (1) auf (2) kommt, wegen des verschwindenden Nenners $1-\lambda^2$ nicht ausführen, und man erhält eine neue Curve, die im nächsten Kapitel untersucht werden soll.

Sechstes Kapitel.

Die Parabel. — Scheitel- und Polargleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

§. 50. Der Ort aller Punkte G (Fig. 38), welche von einem gegebenen Punkte F und einer gegebenen Geraden ff gleich weit abstehen, heisst eine Parabel, F der Brennpunkt, ff die Directrix oder Leitlinie der Parabel. Die Gestalt der Parabel hängt allein von der Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie FL ab, sie sei $= p$.

Aufgabe. Die Gleichung der Parabel zu bestimmen.

Die Mitte von FL sei der Anfangspunkt der Coordinaten; eine Parallele zur Leitlinie sei die y-Axe; AF die positive x-Axe, also die Abscisse von $L = -\frac{p}{2}$. Ist G der Punkt (x, y), so ist das

Loth $GH = JA + AL = x + \frac{p}{2}$ (für einen Punkt mit negativer Abscisse ist es gleich + oder $-\left(x + \frac{p}{2}\right)$, je nachdem G zwischen der Ordinatenaxe und der Leitlinie oder jenseits der letzteren liegt) und $GF = \left\{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, also, weil $GF = GH$:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

woraus:

$$(1) \quad y^2 = 2px.$$

Der Gleichung (1) genügt der Anfangspunkt (0, 0), also geht die Curve durch A; dieser Punkt heisst der Scheitel. Da negative Werthe des x, imaginäre des y ergeben würden, so erstreckt sich die Curve nur in den beiden Quadranten mit positivem x, den Werth der Abscisse kann man von $x = 0$ bis $x = +\infty$ wachsen lassen. Zu jedem Werthe von x gehören zwei gleiche, mit entgegengesetztem Zeichen behaftete Werthe von y, also theilt die x-Axe, die deshalb auch die Axe der Curve heisst, die Parabel in zwei congruente Hälften; y selbst wächst ebenfalls absolut von 0 bis ∞. Während aber die Parabel, sich ins Unendliche erstreckend, sich immer mehr von der Axe entfernt, nähert sich die Gerade AG derselben immer mehr, denn $\operatorname{tang} GAJ = \frac{y}{x} = \frac{2p}{y}$ wird mit wachsendem y immer kleiner. Die Ordinaten der Durchschnittspunkte einer Geraden:

$$(2) \quad lx + my + n = 0$$

mit der Curve sind durch die quadratische Gleichung gegeben:

$$(3) \quad ly^2 + 2pmy + 2pn = 0;$$

diese Gleichung hat eine unendliche Wurzel (§. 44), wenn $l = 0$; dann ist aber (2) oder $my + n = 0$ der Axe parallel; folglich schneidet jede Parallele zur Axe die Parabel in einem endlich und in einem unendlich entfernten Punkte. Beide Durchschnittspunkte können nur ins Unendliche fallen, wenn $l = 0$, $m = 0$ ist; dann hört (2) auf Gleichung einer Geraden zu sein; also hat die Parabel keine Asymptoten (§. 44, Anm.).

Um die Parabel punktweise zu construiren, verbinde man F

mit irgend einem Punkte H auf ff, errichte in der Mitte K von FH ein Loth zu FH, und von H ein Loth zu ff, dann ist für den Durchschnitt G: $GF = GH$, also G ein Punkt der Curve; K liegt offenbar in der y-Axe.

§. 51. Secante, Tangente und Normale der Parabel. Es seien (x', y'), (x'', y'') zwei Punkte der Parabel, also:

$$y'^2 = 2px', \qquad y''^2 = 2px'',$$

woraus:

$$y'^2 - y''^2 = 2p(x' - x'') \quad \text{und:} \quad \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{2p}{y' + y''}.$$

Die Gleichung der durch beide Punkte gehenden Geraden ist:

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x'),$$

oder, wegen der letzten Gleichung:

$$(1) \quad y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x').$$

Soll die durch zwei andere Parabelpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) gehende Secante der ersten parallel sein, so ist erforderlich und ausreichend, dass $y' + y'' = y_1 + y_2$; nun sind aber die Ordinaten der Mitten beider Sehnen $\frac{1}{2}(y' + y'')$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ und daher für parallele Sehnen gleich, folglich ergiebt sich der Satz:

I. In einer Parabel liegen die Mitten paralleler Sehnen in einer Parallelen zur Axe.

Alle Parallelen zur Axe heissen Durchmesser der Parabel. Fällt (x'', y'') mit (x', y') zusammen, so wird aus der Secante (1) eine Tangente. Man erhält demnach als Gleichung der Tangente am Berührungspunkte (x', y'): $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$, und wenn man nach Wegschaffung des Nenners y' statt y'^2 den Werth $2px'$ setzt:

$$(2) \quad yy' = p(x + x').$$

Man findet aus dieser Gleichung oder als eine Folgerung aus I., dass die Tangente am Endpunkte eines Durchmessers den Sehnen parallel ist, die dieser halbirt; die Ordinatenaxe ist also Tangente am Scheitel. Die Gleichung der Normale, die durch (x', y') geht und auf (2) senkrecht steht, ist:

$$(3) \quad y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x').$$

Zur Construction der Tangente und Normale suchen wir ihre Durchschnitte mit der x-Axe. Setzt man in (2) $y = 0$, so kommt $x = -x'$; der Punkt P (Fig. 38), wo die Tangente in G die Axe trifft, ist also vom Scheitel A eben so weit entfernt, als der Fusspunkt J der Ordinate; weil $PA + AF = AJ + AL$ oder $PF = JL = GH$, und nach §. 50 $GF = GH$, so ist $GF = PF$. Hieraus ergiebt sich die Gleichheit der Winkel PGF, GPF, oder der W. PGF, $P'GH'$, d. h.:

II. Die Tangente bildet gleiche Winkel mit dem Radius-Vector und dem Durchmesser.

Setzen wir in (3) $y = 0$, so kommt $x = x' + p$; ist demnach GN die Normale, so ist $AN = x' + p$; es ist aber $AJ = x'$, also $JN = p$, d. h.:

III. Das Stück der Axe zwischen der Ordinate und der Normale ist constant $= p$.

Alle diese Eigenschaften gewähren Mittel zur Construction der Normale und Tangente, wenn der Berührungspunkt gegeben ist. — Weil $PF = FG = GH$ und PF parallel mit GH, so ist $PFGH$ ein Rhombus, dessen Diagonalen PG, FH sich unter rechten Winkeln halbiren; die Mitte K von HF liegt aber auf der y-Axe (§. 50), folglich:

IV. Die Fusspunkte (K) der Lothe, welche man vom Brennpunkte F auf die Tangenten fällt, liegen in der Scheiteltangente.

Anm. Aus diesem Satze ergiebt sich eine Construction der Tangenten von einem Punkte P' an die Parabel, man beschreibe (die fehlende Figur ist leicht zu ergänzen) über $P'F$ als Durchmesser einen Kreis und verbinde die Punkte (K und K_0), in welchen er die Scheiteltangente schneidet, mit P', so sind dies die verlangten Tangenten. Die Construction passt auch für den Fall, dass P' ein Punkt der Curve selbst ist. — Weil ferner für den Punkt P' der Tangente $P'F = P'H$, so erhält man die Berührungspunkte G und G_0 der durch P' gehenden Tangenten, wenn man mit $P'F$ um P' einen Kreis beschreibt, und aus den Punkten H und H_0, welche er mit der Leitlinie gemein hat, Parallelen zur Axe zieht, welche die Parabel in G und G_0 treffen.

§. 52. **Umformung der Parabelgleichung.** Die Sehne $BB' = 2t$ (Fig. 39), werde in P durch den Durchmesser QPP' halbirt; es sei φ die Grösse der positiven Drehung von PP' nach PB, ξ, η die Coordinaten von P, $\mathfrak{x}$, η die von Q; dann sind die Coordinaten von B: $\xi + t\cos\varphi$, $\eta + t\sin\varphi$, und die von B': $\xi + t\cos(180^\circ + \varphi)$, $\eta + t\sin(180^\circ + \varphi)$ oder $\xi - t\cos\varphi$, $\eta - t\sin\varphi$. Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Parabel ein, so kommt:

$$\eta^2 + 2\eta t\sin\varphi + t^2\sin\varphi^2 = 2p\xi + 2pt\cos\varphi,$$
$$\eta^2 - 2\eta t\sin\varphi + t^2\sin\varphi^2 = 2p\xi - 2pt\cos\varphi,$$

woraus durch Addition und Subtraction:

$$(1)\quad \eta^2 + t^2\sin\varphi^2 = 2p\xi,$$

$$(2)\quad \eta\sin\varphi = p\cos\varphi, \quad \text{oder:}\quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{p}{\eta}.$$

Die Interpretation von (2) führt auf den Satz I. in §. 51; ferner ist:

$$\sin\varphi^2 = \frac{\operatorname{tang}\varphi^2}{1 + \operatorname{tang}\varphi^2} = \frac{p^2}{p^2 + \eta^2},$$

wodurch (1) in:

$$(3)\quad t^2 = \frac{p^2 + \eta^2}{p^2}(2p\xi - \eta^2)$$

übergeht. Da für Q oder $(\mathfrak{x}, \eta)$: $\eta^2 = 2p\mathfrak{x}$ ist, so kann man statt (3) schreiben:

$$(4)\quad t^2 = \frac{p^2 + 2p\mathfrak{x}}{p^2}(2p\xi - 2p\mathfrak{x}) = 4\left(\frac{p}{2} + \mathfrak{x}\right)(\xi - \mathfrak{x}).$$

Nun ist:

$$\xi - \mathfrak{x} = QP, \qquad \frac{p}{2} + \mathfrak{x} = AL + \mathfrak{x} = L'Q,$$

also:

$$t^2 = 4L'Q \cdot QP.$$

Es können aber t (d. h. BP) und QP als Coordinaten von B in Bezug auf ein schiefwinkliges System angesehen werden, dessen Axen der Durchmesser QP und die (der Sehne BB' parallele) Tangente in Q ist; also, wenn $2L'Q = q$ gesetzt wird:

I. Die Gleichung der Parabel, bezogen auf einen Durchmesser als x-Axe und die Tangente am Endpunkte oder Scheitel des Durchmessers als y-Axe, ist:

$$(5) \quad y^2 = 2qx,$$

wo q die doppelte Entfernung des Anfangspunktes von der Leitlinie bedeutet.

Ist das schiefwinklige Axensystem xQy (Fig. 40) und $q = 2QL'$ gegeben, so ist die durch L' gehende Senkrechte zur x-Axe die Leitlinie der Parabel. Fällt man von L' auf die y-Axe das Loth $L'K$ und macht seine Verlängerung $KF = KL'$, so ist nach den §§. 50 und 51 F der Brennpunkt.

Durch dieselbe Rechnung wie in §. 51 findet man die Gleichung der Tangente in diesem schiefwinkligen Systeme:

$$(6) \quad yy' = q(x + x'),$$

wo (x', y') der Berührungspunkt B ist. Ihr Durchschnitt (Fig. 39) P' mit der neuen x-Axe QP hat die Abscisse $-x'$; also ist $P'Q = PQ$; da nun für den Punkt B' oder $(x', -y')$ dasselbe gilt, so haben wir den Satz:

II. Die Tangenten an den Endpunkten einer Sehne schneiden sich auf dem Durchmesser, der die Sehne halbirt, und zwar ist der Scheitel des Durchmessers (Q) von der Mitte der Sehne (P) und dem Durchschnitte der Tangenten (P') gleich weit entfernt.

Um demnach von einem Punkte P' (Fig. 39) ausserhalb der Parabel Tangenten an dieselbe zu legen, ziehe man durch P' eine Parallele zur Axe, welche die Curve in Q trifft, mache $QP = QP'$, und lege durch P eine Gerade, welche der Tangente in Q parallel ist, so wird dieselbe die Curve in den verlangten Berührungspunkten treffen.

§. 53. Die Berührungssehne. Es sei (ξ, η) ein beliebiger Punkt in der Ebene der auf einen Durchmesser und die Tangente an seinem Scheitel bezogenen Parabel $y^2 = 2qx$. Ist (x', y') der Berührungspunkt einer Tangente $yy' = q(x + x')$, und soll dieselbe durch (ξ, η) gehen, so ist erforderlich und ausreichend, dass $\eta y' = q(\xi + x')$ sei; der Berührungspunkt (x', y') liegt demnach auf der Geraden:

$$(1) \quad \eta y = q(x + \xi).$$

Umgekehrt, die Tangente jedes Parabelpunktes, welcher auf (1) liegt, geht durch (ξ, η), also ist (1) die zu (ξ, η) gehörende Berührungssehne.

Die Berührungssehnen der Punkte (ξ, η), (ξ, η'), (ξ, η'') ... treffen die x-Axe in einem Punkte, dessen Abscisse $= -\xi$, während die Punkte selbst in einer Parallelen zur y-Axe liegen; man kann aber für jede Gerade AA' (Fig. 41 und 42) eine ihr parallele Tangente der Parabel bestimmen (am Endpunkte des Durchmessers, welcher die AA' parallelen Sehnen halbirt), folglich:

I. Legt man von den Punkten einer Geraden AA' Tangentenpaare an die Parabel, so schneiden sich die Berührungssehnen sämmtlich in einem Punkte J; der durch J gezogene Durchmesser trifft, nöthigenfalls verlängert, AA' in einem Punkte H, so dass sein Scheitel Q die Mitte von JH ist. Ausserdem halbirt dieser Durchmesser die mit AA' parallelen Sehnen; wenn demnach die Linie AA' die Parabel schneidet, so ist sie zugleich Berührungssehne von J (§. 52, II.).

Aehnlich wie in §. 39 beweist man auch die Umkehrung dieses Satzes, nämlich:

II. Legt man durch einen Punkt J Gerade, von welchen jede die Parabel in zwei Punkten trifft, und bestimmt für jedes Punktepaar den Durchschnitt der zugehörigen Tangenten, so ist der Ort desselben eine Gerade AA'; der durch J gehende Durchmesser halbirt die mit AA' parallelen Sehnen, und trifft AA' in einem Punkte H, so dass sein Scheitel Q die Mitte von JH ist; können demnach von J aus Tangenten an die Parabel gelegt werden, so ist AA' die Berührungssehne.

Man nennt J den Pol von AA' und diese Gerade die Polare von J; ist J der Brennpunkt, so ist AA' die Leitlinie.

§. 54. Flächeninhalt von Parabelstücken. Der Lehrsatz (§. 52, II.) führt zu der Inhaltsberechnung des Parabelsegments.

Es sei Q (Fig. 43) der Durchschnitt der Tangenten in A und B, C der Scheitel des durch Q gehenden Durchmessers, der zugleich AB in P halbirt, also FE, die Tangente in C, der Sehne AB

parallel. Weil $QC = CP$, so ist $FE = \frac{1}{2}AB$ und das von Q auf EF gefällte Loth gleich dem von C auf AB gefällten; das eingeschriebene Dreieck ACB ist demnach doppelt so gross, als das umschriebene QFE. Zieht man durch F und E wiederum Durchmesser und in ihren Scheiteln D und D' die Tangenten GH, $G'H'$, so wie ausserdem die Sehnen BD, CD, CD', AD', so sind nach derselben Schlussfolge die Dreiecke BDC und $AD'C$ das Doppelte der Dreiecke HFG und $H'EG'$; also auch durch Addition das eingeschriebene Fünfeck $BDCD'A$ doppelt so gross als die von den Tangenten gebildete Figur $HQH'G'GH$. Fährt man auf diese Weise fort, indem man durch H, G, H', G' wieder Durchmesser zieht, so findet man endlich, nach bekannter Schlussweise, dass die von der Sehne AB und dem Parabelbogen BCA begränzte Fläche doppelt so gross ist, als das von dem Curvenbogen und den Tangenten an den Endpunkten der Sehne eingeschlossene Stück; oder mit anderen Worten:

Das von einer Sehne und der Parabel begränzte Stück ist zwei Drittel des Dreiecks, welches die Sehne mit den Tangenten an ihren Endpunkten einschliesst.

Steht die Sehne zur Axe senkrecht, so theilt letztere die ganze Figur in zwei congruente Stücke; daher ist auch (Fig. 38) das von der Ordinate GJ $(= y)$, der Abscisse AJ $(= x)$, und dem Bogen AG begränzte Stück zwei Drittel des Dreiecks GPJ, also, wegen $PJ = 2x$, gleich $= \frac{2}{3}xy$.

§. 55. Scheitelgleichungen der Ellipse und Hyperbel. Die Gleichungen dieser beiden Curven nehmen eine ähnliche Form an wie die der Parabel, wenn ein Durchmesser und die Tangente an einem seiner Endpunkte als x- und y-Axen angenommen werden. — Es sei in der Ellipse (Fig. 23) die Tangente in L die y-Axe, LL' die x-Axe, also für den Punkt P, $PQ = y$, $LQ = x$. Nach §. 34, III. ist $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, wo X die vom Mittelpunkte gezählte Abscisse OQ bedeutet; es ist aber für jede Lage von P, $X = \alpha - x$, also:

$$\frac{(\alpha - x)^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{oder:} \quad -\frac{2x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0,$$

woraus:

$$(1) \quad y^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha}x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2,$$

und wenn gesetzt wird:

$$(2)\quad p = \frac{\beta^2}{\alpha},$$

so kommt:

$$(3)\quad y^2 = 2px - \frac{p}{\alpha}x^2.$$

Setzt man bei der Hyperbel (Fig. 33) die von O in der Richtung nach OQ positiv genommenen Abscissen $= X$, und die vom Scheitel L nach derselben Richtung gerechneten Abscissen $= x$, so hat man (§. 47, II.):

$$\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad X = x + \alpha,$$

woraus:

$$\frac{2x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0,$$

und, wenn wiederum der Kürze wegen p statt $\frac{\beta^2}{\alpha}$ geschrieben wird:

$$(4)\quad y^2 = 2px + \frac{p}{\alpha}x^2.$$

Nimmt man demnach einen Curvenpunkt als Anfangspunkt, den durch ihn gehenden Durchmesser als x-Axe, die Tangente an demselben als y-Axe, so stellt $y^2 = 2px + qx^2$ die Gleichung einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor, je nachdem q negativ, $= 0$, oder positiv ist. — Die Linie $2p = \frac{2\beta^2}{\alpha}$ nennt man den Parameter des Durchmessers, welcher als x-Axe dient. Ist die x-Axe diejenige Hauptaxe $2a$, welche die Brennpunkte enthält, also ihr Parameter $2p = 2\frac{b^2}{a}$, so ist $2p$ die durch einen Brennpunkt gezogene zur Hauptaxe senkrechte Sehne. Denn die Mittelpunktsgleichung der Ellipse oder der Hyperbel ist $\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$; die Abscisse eines Brennpunktes vom Mittelpunkte aus gezählt $e = \sqrt{a^2 \mp b^2}$; also ist die auf dem Brennpunkte stehende Ordinate durch die Gleichung gegeben $\frac{a^2 \mp b^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, woraus $y^2 = \frac{b^4}{a^2}$, und $y = p$. Dasselbe gilt für die

auf ihre Hauptaxe bezogene Parabel $y^2 = 2px$; denn die Abscisse des Brennpunktes ist gleich $\frac{p}{2}$, also die Ordinate im Brennpunkte $= p$ und die in Rede stehende Sehne $= 2p$. — Wird in (3) und (4) die Grösse a unendlich angenommen, so erhält man die Gleichung der Parabel; diese Curve kann also als eine Ellipse oder Hyperbel angesehen werden, von welcher der Mittelpunkt und der eine Brennpunkt unendlich entfernt sind.

§. 56. Polargleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel. Es sei in der Ellipse (Fig. 21) der Radius-Vector $FG = r$, der von AF nach FG gezählte Winkel $AFG = v$, so dass für A' Winkel $v = 180°$ wird; x die Abscisse von G, vom Mittelpunkte aus gerechnet, und x_1 die vom Brennpunkte aber nach derselben Richtung gezählte, so ist:

$$x_1 = r\cos v, \quad x_1 = x - e, \quad r = a - \frac{ex}{a} \text{ (§. 40)},$$

also:

$$r = a - \frac{e}{a}(e + r\cos v), \text{ woraus: } r(a + e\cos v) = a^2 - e^2 = b^2.$$

Schreibt man:

$$(1) \quad \frac{b^2}{a} = p, \quad \frac{e}{a} = \lambda,$$

so ist die Polargleichung der Ellipse vom Brennpunkte aus:

$$(2) \quad r = \frac{p}{1 + \lambda\cos v}.$$

Für die Hyperbel (Fig. 30) möge ebenfalls dem Scheitel A, so wie A' der Werth $v = 0$ entsprechen; dann ist $OF - FH = OH$, oder $x = e - r\cos v$, welche Formel für jede Lage von G gilt. Nun ist (§. 48) für den Hyperbelzweig, in dem F liegt, $r = \frac{ex}{a} - a$, und für den anderen $= a - \frac{ex}{a}$, also hat man die Formeln:

$$r = \frac{e^2}{a} - \frac{e}{a} r\cos v - a, \quad r = a - \frac{e^2}{a} + \frac{e}{a} r\cos v,$$

woraus;

$$r(a + e\cos v) = e^2 - a^2 = b^2,$$
$$r(e\cos v - a) = e^2 - a^2 = b^2,$$

und mit Hülfe der Abkürzungen (1):

$$(3)\quad r = \frac{p}{1+\lambda\cos v} \quad \text{und:} \quad (3^*)\quad r = \frac{p}{\lambda\cos v - 1}.$$

Für die Parabel (Fig. 38) sei wiederum W. $AFG = v$, dann ist:

$$x = AF + FJ = \frac{p}{2} + r\cos(180^\circ - v) = \frac{p}{2} - r\cos v;$$

nun ist (§. 50):

$$r = FG = GH = \frac{p}{2} + x = -r\cos v,$$

woraus:

$$(4)\quad r = \frac{p}{1+\cos v}.$$

Weil $\frac{e}{a} = \lambda$ für die Ellipse (Hyperbel) kleiner (grösser) als 1 ist, so stellt also die Polargleichung:

$$r = \frac{p}{1+\lambda\cos v},$$

die Ellipse, die Parabel oder einen Hyperbelzweig dar, je nachdem $\lambda < 1$, $\lambda = 1$, oder $\lambda > 1$ ist.

Siebentes Kapitel.

Transformation der Coordinaten.

§. 57. Die folgenden Untersuchungen verlangen die Lösung der Hilfsaufgabe, „wenn die gegenseitige Lage zweier Coordinatensysteme und die Coordinaten eines Punktes B in Bezug auf das eine System bekannt sind, die Coordinaten von B in Bezug auf das andere System zu finden“. Wir haben in §. 6 gesehen, dass, wenn beide Systeme parallel und gleich gerichtet sind, und B in Bezug auf das erste System x, y und in Bezug auf das zweite X, Y zu Coordinaten hat, die Gleichungen:

$$(1)\quad X = x - \xi, \qquad Y = y - \eta$$

stattfinden, wo ξ, η die Coordinaten des zweiten Anfangspunktes in Bezug auf das erste System sind. Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, dass beide Systeme den Anfangspunkt, aber nicht die Richtungen der Axen gemein haben, und zuletzt den allgemeinen Fall betrachten.

§. 58. Transformation der Coordinaten mit demselben Anfangspunkte. Es sei (Fig. 44) *abcdef*.. eine gebrochene Linie; durch *a* sei eine Gerade gezogen, deren eine Hälfte *t* als positive Halbaxe einer Abscissenlinie angesehen werde. Versteht man unter (ab, t), (bc, t), (cd, t) u. s. w. die Winkel, welche die Richtung eines Punktes, der die Seiten *ab*, *bc*, *cd*, .. der Reihe nach durchläuft, mit *t* bildet *), so ist die Abscisse von $a = 0$, von $b = ab \cos(ab, t)$, von $c = ab \cos(ab, t) + bc \cos(bc, t)$; denn ist (bc, t) spitz, wie in Fig. 44, so ist zu der Abscisse von *b* das Stück $b'c' = bc \cos(bc, t)$ hinzuzufügen, und ist (bc, t) stumpf, wie in Fig. 45, so ist von der Abscisse von *b* das Stück $b'c' = bc \cos(180^\circ - (bc, t)) = -bc \cos(bc, t)$ abzuziehen, d. h. $bc \cos(bc, t)$ zu addiren. Ebenso findet sich die Abscisse von $d = ab \cos(ab, t) + bc \cos(bc, t) + cd \cos(cd, t)$ u. s. w. Bildet die gebrochene Linie ein geschlossenes Polygon $abc \ldots fga$, so ist die Abscisse des letzten Punktes *a* wieder $= 0$, und man hat:

$$(1) \quad ab \cos(ab, t) + bc \cos(bc, t) + \cdots$$
$$\cdots + fg \cos(fg, t) + ga \cos(ga, t) = 0;$$

welche Formel die Grundlage der Polygonometrie bildet. — Die Richtung *t* bildet mit der Richtung einer Seite, wie *ab*, zwei Winkel, die sich zu 360° ergänzen; da aber die Cosinus zweier solcher Winkel gleich sind, so ist es für die Formel (1) und die folgenden gleichgültig, welchen von beiden man nimmt; dies würde nicht der Fall sein, wenn die Formel (1) Sinus enthielte.

Es sei die Halbaxe *t* durch den Anfangspunkt *O* eines Coordinatensystems gezogen (Fig. 46); wir bezeichnen *Ob* durch *r*, den Winkel (Ob, t) durch (r, t) und die Winkel zwischen den positiven Halbaxen *x* und *y* und der Axe *t* bezüglich durch (x, t), (y, t); dann ist das *t* des Punktes *b* gleich $r \cos(r, t)$, und auch nach dem Vorigen gleich $Oa \cos(Oa, t) + ab \cos(ab, t)$, also:

$$(2) \quad r \cos(r, t) = Oa \cos(Oa, t) + ab \cos(ab, t).$$

*) In der Figur sind die Winkel (ab, t), (bc, t), (cd, t).. mit α, β, γ.. bezeichnet.

Liegt nun der Punkt b im positiven Quadranten, so ist $Oa = x$, $ab = y$, und die Richtungen von O nach a, und von a nach b den $+x$- und $+y$-Richtungen parallel; also wird aus (2):

$$(3) \quad r\cos(r,\, t) = x\cos(x,\, t) + y\cos(y,\, t).$$

Ist dagegen eine der Coordinaten negativ, wie z. B. für b' die Abscisse, so gilt zwar noch immer (2) $r\cos(r,\, t) = Oa'\cos(Oa',\, t) + a'b'\cos(a'b',\, t)$, aber $(Oa',\, t)$ ist nicht $= (x,\, t)$, sondern $(180^0 - (x,\, t))$, und $r\cos(r,\, t) = -Oa'\cos(x,\, t) + y\cos(y,\, t)$; weil jedoch $x = -Oa'$, so geht diese Formel wieder in (3) über; ähnlich zeigt man die Gültigkeit von (3) für die beiden anderen Quadranten der Ebene.

Bezeichnen nun $(x,\, y)$, $(x',\, y')$ die Coordinaten eines und desselben Punktes b in Bezug auf zwei Coordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte O (Fig. 47) und t eine beliebige durch O gezogene Halbaxe, so ist auch:

$$r\cos(r,\, t) = x'\cos(x',\, t) + y'\cos(y',\, t),$$

also:

$$(4) \quad x\cos(x,\, t) + y\cos(y,\, t) = x'\cos(x',\, t) + y'\cos(y',\, t).$$

Diese Gleichung stellt, da t eine beliebige Gerade ist, unzählig viele Relationen zwischen den vier Grössen x, y, x', y' dar; nimmt man zwei Richtungen für t an, so hat man zwei Gleichungen, aus denen man das eine Paar der Grössen x, y; x', y' durch das andere ausdrücken kann. Ist z. B. t' auf der y-Axe senkrecht, also $(y,\, t') = 90^0$, und $\cos(y,\, t') = 0$, so erhält man:

$$x\cos(x,\, t') = x'\cos(x',\, t') + y'\cos(y',\, t'),$$

und ähnlich, wenn t'' auf der x-Axe senkrecht ist:

$$y\cos(y,\, t'') = x'\cos(x',\, t'') + y'\cos(y'\, t''),$$

oder:

$$(5) \quad \begin{cases} x = x'\dfrac{\cos(x',\, t')}{\cos(x,\, t')} + y'\dfrac{\cos(y',\, t')}{\cos(x,\, t')}, \\[2ex] y = x'\dfrac{\cos(x',\, t'')}{\cos(y,\, t'')} + y'\dfrac{\cos(y',\, t'')}{\cos(y,\, t'')}. \end{cases}$$

Ist namentlich das eine System $(x',\, y')$ ein rechtwinkliges, und giebt man der Geraden t der Reihe nach die Richtung von $+x'$ und $+y'$,

so kommt, mit Berücksichtigung von $\cos(x', x') = 1$, $\cos(x', y') = 0$, $\cos(y', y') = 1$:

$$(6) \quad \begin{cases} x\cos(x, x') + y\cos(y, x') = x', \\ x\cos(x, y') + y\cos(y, y') = y'. \end{cases}$$

Stimmen die Drehungsrichtungen von der $+x$- nach der $+y$-Axe und von der $+x'$- nach der $+y'$-Axe überein, und ist in diesem Sinne gemessen der Winkel von der $+x$- nach der $+y$-Axe $= \varphi$, und von der $+x$- nach der x'-Axe $= a$, also nach der $+y'$-Axe $= 90^\circ + a$, so sind die Winkel von der $+y$- nach der $+x'$- und $+y'$-Axe bezüglich gleich $a - \varphi$ und $90^\circ + a - \varphi$. (Fällt einer dieser Winkel negativ aus, so kann man 360° hinzuaddiren.) Wir haben demnach in (6) $\cos(x, x') = \cos a$, $\cos(x, y') = \cos(90^\circ + a) = -\sin a$, $\cos(y, x') = \cos(a - \varphi) = \cos(\varphi - a)$, $\cos(y, y') = \cos(90^\circ + a - \varphi) = -\sin(a - \varphi) = \sin(\varphi - a)$ zu setzen; man erhält hierdurch:

$$(7) \quad \begin{cases} x' = x\cos a + y\cos(\varphi - a), \\ y' = -x\sin a + y\sin(\varphi - a). \end{cases}$$

Löst man diese Gleichungen nach x und y auf, so kommt, weil $\cos a \sin(\varphi - a) + \sin a \cos(\varphi - a) = \sin(\varphi - a + a) = \sin\varphi$:

$$(8) \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin\varphi}\{x'\sin(\varphi - a) - y'\cos(\varphi - a)\}, \\ y = \dfrac{1}{\sin\varphi}\{x'\sin a + y'\cos a\}. \end{cases}$$

Die Formeln (7) und (8) geben die Transformation eines beliebigen Systems (x, y) in ein rechtwinkliges (x', y') und umgekehrt. Ist auch das (x, y)-System rechtwinklig, oder $\varphi = 90^\circ$, also das (x', y') System die Lage, in welche das (x, y) System durch eine positive Drehung um den Winkel a gelangt, so gehen die Formeln (8) in:

$$(9) \quad x = x'\cos a - y'\sin a, \qquad y = x'\sin a + y'\cos a$$

über.

Anm. Quadrirt man die Gleichungen (7) und addirt sie, so kommt wegen:

$$\cos a^2 + \sin a^2 = 1, \quad \cos a\cos(\varphi - a) - \sin a\sin(\varphi - a) = \cos\varphi,$$
$$\cos(\varphi - a)^2 + \sin(\varphi - a)^2 = 1:$$

$$(10) \quad x'^2 + y'^2 = x^2 + 2xy\cos\varphi + y^2;$$

eine Gleichung, die man vorhersehen konnte, weil die beiden Seiten desselben das Quadrat der Entfernung eines Punktes vom gemeinschaftlichen Anfangspunkte bezüglich in dem rechtwinkligen Systeme (x', y') und in dem schiefwinkligen (x, y) ausdrücken.

§. 59. Allgemeine Transformation der Coordinaten. Aus §. 58, Form. 5 ergiebt sich, dass die Transformationsformeln, wenn beide Systeme denselben Anfangspunkt haben, von der Form sind:

$$x = \alpha x' + \beta y', \qquad y = \alpha' x' + \beta' y',$$

wo α, β, α', β' nur von den Winkelverhältnissen zwischen den vier Axen abhängige Coefficienten bedeuten. — Man habe jetzt zwei beliebige Coordinatensysteme, x, y und x', y'; das eine mit dem Anfangspunkte O, das andere mit dem Anfangspunkte O'; durch O' lege man ein Hilfssystem (X, Y), das dem ersten (x, y) parallel und gleich gerichtet ist; dann gelten für die Coordinaten eines und desselben Punktes in Bezug auf die drei Systeme die Gleichungen:

$$(1)\quad X = x - \xi,\ Y = y - \eta;\ X = \alpha x' + \beta y',\ Y = \alpha' x' + \beta' y',$$

wo ξ, η die Coordinaten von O' in Bezug auf das (x, y)-System und α, β, α', β' durch die Winkelverhältnisse zwischen den Axen (x, y) und (x', y') nach §. 58 bekannt sind. Aus (1) folgt:

$$(2)\quad \begin{cases} x = \xi + \alpha x' + \beta y', \\ y = \eta + \alpha' x' + \beta' y', \end{cases}$$

und dies sind die Formeln für die allgemeine Transformation der Coordinaten. Sind z. B. (wie in Fig. 48) beide Systeme rechtwinklig und das zweite gegen das erste um a im positiven Sinne gedreht, so ist in Folge von §. 58, Form. 9:

$$(3)\quad x = \xi + x' \cos a - y' \sin a, \quad y = \eta + x' \sin a + y' \cos a;$$

für andere Winkelverhältnisse beider Systeme bekommt man andere Werthe der Constanten α, β; α', β'.

Es seien die Gleichungen der beiden Axen Ox, Oy in Bezug auf das andere System $x'O'y'$ bezüglich:

$$(4)\quad A + Bx' + Cy' = 0, \qquad (5)\quad A' + B'x' + C'y' = 0.$$

Nun ist für die Ox-Axe $y = 0$, also zufolge (2):

$$(6)\quad \eta + \alpha' x' + \beta' y' = 0,$$

und für die Oy-Axe $x = 0$, also wegen (2):

$$(7)\quad \xi + \alpha x' + \beta y' = 0.$$

Da (4) und (6) dieselbe Gerade in dem System $x'O'y'$ darstellen, so können sich ihre linken Seiten nur durch einen constanten (von x', y' unabhängigen) Factor unterscheiden (§. 17), dasselbe gilt für (5) und (7), und wenn man diese Factoren durch δ, δ' bezeichnet, so muss sein:

$$\begin{aligned} \eta + \alpha' x' + \beta' y' &= \delta(A + Bx' + Cy'), \\ \xi + \alpha x' + \beta y' &= \delta'(A' + B'x' + C'y'); \end{aligned}$$

dies giebt den wichtigen Satz:

I. Sind $p = 0$, $q = 0$ die Gleichungen zweier sich schneidenden Geraden in Bezug auf ein gegebenes Coordinatensystem (x', y'), und macht man die erste zur y-, die zweite zur x-Axe eines neuen Systems (x, y), so sind die Transformationsformeln der Coordinaten $x = \delta p$, $y = \delta' q$, wo δ und δ' zwei von Null verschiedene Constanten bezeichnen.

Ist die Gleichung einer Curve $U = 0$ in dem System (x, y) gegeben, und man schreibt in $U = 0$ statt x und y die rechten Seiten von (2), so erhält man die Gleichung $U' = 0$, welche dieselbe Curve in Bezug auf das (x', y')-System darstellt. Ist die Curve namentlich eine algebraische der $n$ten Ordnung, so dass U aus einer Reihe von Gliedern besteht $ax^l y^{l'} + bx^m y^{m'} + \cdots$, wo die Exponentensummen $l + l'$, $m + m'$, .. den Werth n nicht übersteigen, aber wenigstens einmal erreichen, so wird $U' = 0$ von keiner höheren Ordnung sein können als $U = 0$, denn das Glied, welches an die Stelle von $ax^l\, y^{l'}$ tritt, $a(\xi + \alpha x' + \beta y')^l (\eta + \alpha' x' + \beta' y')^{l'}$, ist ebenfalls von der Dimension $l + l'$. Andererseits kann man durch ganz analoge Formeln wie (2) $U' = 0$ in $U = 0$ zurücktransformiren, also kann auch U von keiner höheren Ordnung sein wie U', d. h. die Ordnung einer algebraischen Curve bleibt durch die Transformation der Coordinaten ungeändert.

§. 60. Anwendungen auf die Lehre vom Punkte und der geraden Linie. Aus der Formel (§. 58, 3), nämlich:

$$(1)\quad r\cos(r,\,t) = x\cos(x,\,t) + y\cos(y,\,t)$$

folgt, wenn t der Reihe nach mit r, der $+x$-, der $+y$-Axe zusammenfällt:

$$(2)\quad r = x\cos(x,\,r) + y\cos(y,\,r),$$
$$(3)\quad r\cos(r,\,x) = x + y\cos(y,\,x),$$
$$(4)\quad r\cos(r,\,y) = x\cos(x,\,y) + y,$$

und wenn man $x\times(3) + y\times(4)$ bildet, mit Berücksichtigung von (2):

$$(5)\quad r^2 = x^2 + 2xy\cos(x,\,y) + y^2 \text{ (vgl. §. 11, Form. 3).}$$

Dividirt man (3) und (4) durch r, so lassen sich die Brüche $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ aus den neuen Gleichungen berechnen, und es kommt:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{x}{r}\{1-\cos(x,\,y)^2\} = -\cos(r,\,y)\cos(y,\,x) + \cos(r,\,x), \\ \frac{y}{r}\{1-\cos(x,\,y)^2\} = -\cos(r,\,x)\cos(y,\,x) + \cos(r,\,y). \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe in die durch r dividirte Gleichung (2) ein, so wird:

$$(7)\quad 1-\cos(x,\,y)^2-\cos(r,\,x)^2-\cos(r,\,y)^2 + 2\cos(r,\,x)\cos(r,\,y)\cos(y,\,x) = 0,$$

dies ist eine Gleichung zwischen den Winkeln, welche drei durch einen Punkt gezogene Richtungen x, y, r bilden. Giebt man den kleinen Vortheil auf, bei der Bezeichnung $(r,\,x)$ und ähnlichen von der Feststellung einer Drehungsrichtung absehen zu dürfen, so kann man Sinus einführen und die Formeln (6) vereinfachen sich. Gehen nämlich von einem Punkte O zwei Richtungen aus a und b, und nennt man $(b,\,a)$ die im positiven Sinne gezählte Drehung (§. 8) von a nach b, so ist, wie man sich leicht überzeugt, $(b,\,a) = 360^\circ - (a,\,b)$ oder $= -(a,\,b)$, wenn man 360° und seine Vielfachen ausser Acht lässt, und $(c,\,b) = (c,\,a) - (b,\,a)$; ferner kann $\cos(a,\,b)$ und $-\sin(a,\,b)$ für $\cos(b,\,a)$ und $\sin(b,\,a)$ gesetzt werden. Erwägt man, dass:

$$(6^*)\quad \begin{cases} \cos(r,x) = \cos\{(r,y)-(x,y)\} = \cos(r,y)\cos(x,y) \\ \qquad\qquad + \sin(r,y)\sin(x,y), \\ \cos(r,y) = \cos\{(r,x)-(y,x)\} = \cos(r,x)\cos(y,x) \\ \qquad\qquad + \sin(r,x)\sin(y,x), \end{cases}$$

so gehen die Formeln (6) in die folgenden über:

$$(7)\quad x = r\frac{\sin(r,y)}{\sin(x,y)}, \qquad y = r\frac{\sin(r,x)}{\sin(y,x)},$$

und die Substitution dieser Werthe in (5) ergiebt:

$$(8)\quad \sin(r,y)^2 - 2\sin(r,y)\sin(r,x)\cos(y,x) + \sin(r,x)^2 = \sin(y,x)^2.$$

Es sei (x', y') der Endpunkt einer zweiten vom Anfange der Coordinaten ausgehenden Geraden r'; wir wollen der Kürze wegen den Axenwinkel (y, x) mit φ und:

	$\cos(r,x)$,	$\cos(r,y)$,	$\cos(r',x)$,	$\cos(r',y)$	
mit:	α,	β,	α',	β'	bezeichnen.

Aus (1) folgt dann:

$$(9)\quad r\cos(r,r') = x\cos(x,r') + y\cos(y,r'),$$

und weil:

$$r'\cos(x,r') = x' + y'\cos\varphi, \qquad r'\cos(y,r') = x'\cos\varphi + y',$$

so wird diese Gleichung:

$$(10)\quad rr'\cos(r,r') = xx' + yy' + \cos\varphi(xy' + x'y),$$

oder:

$$(11)\quad \cos(r',r) = \frac{xx' + yy' + \cos\varphi(xy' + x'y)}{\sqrt{x^2 + 2xy\cos\varphi + y^2}\sqrt{x'^2 + 2x'y'\cos\varphi + y'^2}}.$$

Setzt man in (9) oder in $\cos(r,r') = \frac{x}{r}\alpha' + \frac{y}{r'}\beta'$ für $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ aus (6) die Werthe $\frac{\alpha - \beta\cos\varphi}{\sin\varphi^2}$, $\frac{\beta - \alpha\cos\varphi}{\sin\varphi^2}$, so kommt:

$$(12)\quad \cos(r',r) = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' - \cos\varphi(\alpha'\beta + \beta'\alpha)}{\sin\varphi^2}.$$

Für $\sin(r'r) = \sin\{(r',x)-(r,x)\} = \sin(r',x)\cos(r,x) - \cos(r',x)\sin(r,x)$ erhält man auch zwei Ausdrücke; schreibt

man mit Berücksichtigung von (7) und (3) für $\sin(r, x)$ und $\cos(r, x)$ bezüglich $\frac{y \sin\varphi}{r}$ und $\frac{x + y\cos\varphi}{r}$, und analog für die accentuirten Grössen, so kommt:

$$(13) \quad \sin(r', r) = \frac{(xy' - x'y)\sin\varphi}{\sqrt{x^2 + 2xy\cos\varphi + y^2}\sqrt{x'^2 + 2x'y'\cos\varphi + y'^2}}.$$

Schreibt man hingegen α für $\cos(r, x)$ und für $\sin(r, x)$ den aus der zweiten Gleichung (6*) sich ergebenden Werth $\frac{\beta - \alpha\cos\varphi}{\sin\varphi}$ und ebenso für $\cos(r', x)$, $\sin(r', x)$ bezüglich α', $\frac{\beta' - \alpha'\cos\varphi}{\sin\varphi}$, so kommt:

$$(14) \quad \sin(r', r) = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sin\varphi}.$$

Ist in (1) (x, y) ein Punkt einer Geraden G, und t die Richtung des vom Anfangspunkte O auf G gefällten Lothes, so ist $r\cos(r, t)$ die Länge dieses Lothes p, also:

$$(15) \quad p = x\cos(p, x) + y\cos(p, y)$$

die Gleichung der Geraden G, deren Lage durch die Länge von p und die Winkel (p, x) und (p, y) vollkommen bestimmt ist. Ist die Gleichung der Geraden unter der Form:

$$(16) \quad ax + by + c = 0$$

gegeben, so muss, wenn λ einen noch zu bestimmenden Factor bedeutet:

$$(17) \quad \cos(p, x) = \lambda a, \quad \cos(p, y) = \lambda b, \quad p = -\lambda c$$

sein. In Folge von (7) muss aber:

$$1 - \cos\varphi^2 - \lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2 + 2\lambda^2 ab\cos\varphi = 0$$

werden, woraus:

$$(18) \quad \lambda = \pm \frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}};$$

das Zeichen ist so zu nehmen, dass $p = -\lambda c$ positiv wird, also negativ, wenn c positiv, und umgekehrt; ist $c = 0$, so geht (16) durch den Anfangspunkt und das Zeichen ist willkührlich. — Die Länge P eines von einem beliebigen Punkte (ξ, η) auf (16) gefällten Lo-

thes findet man durch die Betrachtung, dass, wenn (ξ, η) zum Anfangspunkte eines parallelen Coordinatensystems gemacht würde, die Gleichung (16) in $a(X+\xi)+b(Y+\eta)+c=0$, oder in $aX+bY+a\xi+b\eta+c=0$ überginge; es ist demnach:

$$(19)\quad P=\mp\frac{(a\xi+b\eta+c)\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}}.$$

Zwei Gerade:

$$(20)\quad ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0$$

bilden Winkel, von denen der eine dem Winkel (p, p') zwischen den vom Anfangspunkte auf sie gefällten Lothen p und p' gleich ist; nun haben wir:

$$\cos(p,x)=\lambda a,\qquad \cos(p,y)=\lambda b,$$
$$\cos(p',x)=\lambda' a',\qquad \cos(p',y)=\lambda' b',$$
$$\lambda=\pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}},\quad \lambda'=\pm\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos\varphi}}.$$

Vermittelst der Formeln (12) und (14) kommt demnach:

$$(21)\quad \cos(p',p)=\pm\frac{aa'+bb'-\cos\varphi(ab'+a'b)}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\,\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos\varphi}},$$

$$(22)\quad \sin(p',p)=\pm\frac{(ab'-a'b)\sin\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}\,\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos\varphi}};$$

das $+$ Zeichen gilt, wenn c und c' gleiches Zeichen haben, oder wenn cc' positiv ist, das $-$ Zeichen, wenn cc' negativ ist; ist $cc'=0$, so ist das Zeichen willkührlich. Die Geraden (20) stehen demnach auf einander senkrecht, wenn $\cos(p',p)=0$, d. h.:

$$(23)\quad aa'+bb'-\cos\varphi(ab'+a'b)=0.$$

oder:

$$(24)\quad a'(a-b\cos\varphi)+b'(b-a\cos\varphi)=0,$$

was mit §. 24, Form. 7 übereinstimmt. Dagegen sind sie parallel, wenn $\sin(p',p)=0$, oder $ab'-a'b=0$ (§. 19, Anm. 1). Die Gleichung einer durch (ξ, η) gehenden Geraden, welche auf:

$$(16)\quad ax+by+c=0$$

senkrecht steht, ist demnach:

$$(25) \quad (b-a\cos\varphi)(x-\xi)-(a-b\cos\varphi)(y-\eta)=0,$$

da sie durch den Punkt (ξ, η) offenbar befriedigt wird, und, weil $a'=b-a\cos\varphi$, $b'=-(a-b\cos\varphi)$, der Bedingung (24) genügt. Der Durchschnitt von (25) und (16) oder der Fusspunkt des von (ξ, η) auf (16) gefällten Lothes findet sich durch eine ähnliche Rechnung wie in §. 23:

$$(26) \quad \begin{cases} x=\xi+(a-b\cos\varphi)\varepsilon, \\ y=\eta+(b-a\cos\varphi)\varepsilon, \\ \varepsilon=-\dfrac{a\xi+b\eta+c}{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}. \end{cases}$$

Die Länge des Lothes P wird durch die Formel:

$$P^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+2(x-\xi)(y-\eta)\cos\varphi$$

gefunden, und ist schon weiter oben (vgl. Form. 19) auf andere Weise abgeleitet.

Achtes Kapitel.

Discussion und Transformation der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung.

§. 61. Die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung ist:

$$(1) \quad ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0;$$

die Coefficienten $a, b, c, \dots f$ können positiv, negativ oder Null sein; der Fall, dass a, b und c gleichzeitig gleich 0 sind, ist jedoch ausgeschlossen. Der Zahlenfactor 2 ist mehreren dieser Glieder beigelegt worden, um in den folgenden Rechnungen Brüche zu vermeiden. Wir wollen untersuchen, welche geometrische Gestalten, durch (1) dargestellt werden, wenn x und y schiefwinklige Coordinaten bedeuten.

Ist a von Null verschieden (eine Voraussetzung, welche in dem ganzen Paragraphen festgehalten werden soll), so kann statt (1) geschrieben werden:

$$a\left(x^2+2\frac{b}{a}xy+2\frac{d}{a}x\right)+cy^2+2ey+f=0,$$

oder:

$$a\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2-\frac{b^2}{a}y^2-\frac{2bd}{a}y-\frac{d^2}{a}+cy^2+2ey+f=0,$$

und weiter:

$$(2)\quad a\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2\frac{ae-bd}{a}y+\frac{af-d^2}{a}=0.$$

Ist auch $ac-b^2$ von Null verschieden, so lassen sich die drei letzten Glieder schreiben:

$$\frac{ac-b^2}{a}\left(y^2+2\frac{ae-bd}{ac-b^2}y\right)+\frac{af-d^2}{a}$$

$$=\frac{ac-b^2}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{ac-b^2}\right)^2-\frac{(ae-bd)^2}{a(ac-b^2)}+\frac{af-d^2}{a}.$$

Die Reduction der beiden letzten Glieder giebt einen Bruch, dessen Nenner $a(ac-b^2)$ und dessen Zähler:

$$(af-d^2)(ac-b^2)-(ae-bd)^2$$
$$=a^2fc-afb^2-acd^2+d^2b^2-a^2e^2+2aebd-b^2d^2$$
$$=a(afc-ae^2-cd^2-fb^2+2bed).$$

Dadurch verwandelt sich (2) schliesslich in:

$$(3)\quad \begin{cases} a\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{ac-b^2}\right)^2 \\ \quad +\frac{afc-ae^2-cd^2-fb^2+2bed}{ac-b^2}=0. \end{cases}$$

Betrachtet man von den beiden Geraden:

$$(4)\quad x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}=0,\qquad y+\frac{ae-bd}{ac-b^2}=0,$$

die offenbar nicht parallel sind, die erste als Y-Axe, die andere als X-Axe eines neuen Coordinatensystems, so hat man die Formeln (§. 59, I.):

$$X = \delta\left(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a}\right), \quad Y = \delta'\left(y + \frac{ae - bd}{ac - b^2}\right),$$

wo δ und δ' von der gegenseitigen Lage der Axen abhängige Constanten sind, die nicht $= 0$ sein können. Durch Hilfe dieser Formeln verwandelt sich, wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$afc - ae^2 - cd^2 - fb^2 + 2bed = \Delta,$$

die Gleichung (3) in:

$$a\frac{X^2}{\delta^2} + \frac{ac - b^2}{a}\frac{Y^2}{\delta'^2} + \frac{\Delta}{ac - b^2} = 0,$$

oder in:

$$(5) \quad \frac{X^2}{\delta^2} + \frac{ac - b^2}{a^2}\frac{Y^2}{\delta'^2} + \frac{\Delta}{a(ac - b^2)} = 0.$$

Sind nach der Annahme a und $ac - b^2$ von Null verschieden, so ersetzt die einfachere Gleichung (5) die vorgelegte Gleichung (1). Wir unterscheiden bei der Discussion von (5) zwei Hauptfälle.

I. Es sei $ac - b^2$ positiv.

1) Haben Δ und a gleiches Zeichen, so besteht die linke Seite in (5) aus drei positiven Grössen, deren letzte nie gleich Null sein kann; die Gleichung (5) wird demnach durch die Coordinaten keines Punktes befriedigt, und ist also ohne geometrische Bedeutung; dasselbe muss also auch mit der Gleichung (1) der Fall sein. 2) Ist $\Delta = 0$, so wird (5) nur durch $X = 0$ und $Y = 0$ befriedigt; d. h. (1) stellt nur den neuen Anfangspunkt, oder den Durchschnitt der Geraden (4) dar. 3) Ist $\frac{\Delta}{a}$ negativ $= -h^2$, so geht (5), wenn die positive Grösse $ac - b^2 = \lambda^2$ gesetzt wird, in folgende Gleichung über:

$$\frac{1}{\delta^2}X^2 + \frac{\lambda^2}{a^2\delta'^2}Y^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}, \quad \text{oder:} \quad \left(\frac{\lambda}{\delta h}\right)^2 X^2 + \left(\frac{\lambda^2}{a\delta' h}\right)^2 Y^2 = 1.$$

Setzt man noch $\frac{\delta^2 h^2}{\lambda^2} = D^2$, $\frac{a^2\delta'^2 h^2}{\lambda^4} = D_1^2$, so verwandelt sich (5) schliesslich in:

$$\frac{X^2}{D^2} + \frac{Y^2}{D_1^2} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser; also ist (1) auch in diesem Falle die Gleichung einer

Ellipse; die Geraden (4) sind zwei conjugirte Durchmesser und ihr Durchschnitt der Mittelpunkt der Curve.

II. Es sei $ac - b^2$ negativ $= -\lambda^2$.

1) Ist $\varDelta = 0$, dann verwandelt sich (5) in $\frac{X^2}{\delta^2} - \frac{\lambda^2}{a^2\delta'^2} Y^2 = 0$, oder in $\left(\frac{X}{\delta} + \frac{\lambda Y}{a\delta'}\right)\left(\frac{X}{\delta} - \frac{\lambda Y}{a\delta'}\right) = 0$; dies ist die Gleichung eines Systems zweier im Anfangspunkte der X, Y sich schneidenden Geraden. 2) Ist $\varDelta$ von Null verschieden, so kann man statt (5) schreiben $\frac{a\lambda^2}{\varDelta\delta^2} X^2 - \frac{\lambda^4}{a\varDelta\delta'^2} Y^2 = 1$. Die beiden Coefficienten $\frac{a\lambda^2}{\varDelta\delta^2}$ und $\frac{\lambda^4}{a\varDelta\delta'^2}$ haben gleiches Zeichen, weil ihr Product $\frac{\lambda^6}{\varDelta^2\delta^2\delta'^2}$ nothwendig positiv ist. Sind beide positiv, so kann man sie $= \frac{1}{D_1^2}$ und $\frac{1}{D^2}$ setzen, und erhält $\frac{X^2}{D_1^2} - \frac{Y^2}{D^2} = 1$; sind beide negativ, so wird man sie $= -\frac{1}{D_1^2}$ und $-\frac{1}{D^2}$ setzen können, und hätte dann $\frac{Y^2}{D^2} - \frac{X^2}{D_1^2} = 1$. Beide Gleichungen stellen aber eine auf conjugirte Diameter bezogene Hyperbel dar. Die Gleichung (1) ist also ebenfalls die Gleichung einer Hyperbel, und die Geraden (4) sind zwei conjugirte Durchmesser.

III. Es sei $ac - b^2 = 0$.

Die Discussion kann jetzt nicht mehr von Gleichung (3) ausgehen; die Reduction von (1) auf (2) ist jedoch noch möglich, weil a von Null verschieden angenommen wird. Die Gleichung (2) wird in gegenwärtigem Falle:

$$(6) \quad a\left(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a}\right)^2 + 2\frac{ae - bd}{a}y + \frac{af - d^2}{a} = 0.$$

Ist 1) $ae - bd = 0$ und $af - d^2$ negativ $= -\mu^2$, so wird (6):

$$\left(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a}\right)^2 - \frac{\mu^2}{a^2} = 0,$$

oder:

$$\left(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a} + \frac{\mu}{a}\right)\left(x + \frac{b}{a}y + \frac{d}{a} - \frac{\mu}{a}\right) = 0;$$

dies ist die Gleichung eines Systems zweier paralleler Geraden:

$$x+\frac{b}{a}y+\frac{d+\mu}{a}=0,\quad x+\frac{b}{a}y+\frac{d-\mu}{a}=0.$$

2) Ist $ae-bd=0$ und $af-d^2=0$, so verwandelt sich (6) in $\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2=0$, dies ist die Gleichung einer Geraden zum Quadrate erhoben, oder, wie man sich ausdrückt, die Gleichung einer doppelten Geraden. 3) Ist $ae-bd=0$, und $af-d^2$ positiv $=\mu^2$, also $\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\mu^2}{a^2}=0$, so ist diese Gleichung ohne geometrische Bedeutung. 4) Ist $ae-bd$ von Null verschieden, so kann (6) geschrieben werden:

$$(7)\quad a\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right)^2+2\frac{ae-bd}{a}\left(y+\frac{af-d^2}{2(ae-bd)}\right)=0.$$

Nimmt man von den beiden sich schneidenden Geraden:

$$(8)\quad x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}=0,\qquad y+\frac{af-d^2}{2(ae-bd)}=0,$$

die erste zur X-, die zweite zur Y-Axe, so hat man die Transformationsformeln:

$$Y=\delta\left(x+\frac{b}{a}y+\frac{d}{a}\right),\quad X=\delta'\left(y+\frac{af-d^2}{2(ae-bd)}\right),$$

wo δ und δ' zwei von Null verschiedene Constante sind. Dadurch verwandelt sich (7) in $\frac{1}{\delta^2}Y^2+\frac{2(ae-bd)}{a^2\delta'}X=0$, oder in:

$$(9)\quad Y^2=-\frac{2\delta^2(ae-bd)}{a^2\delta'}X.$$

Dies ist aber (§. 52, I.) die Gleichung einer Parabel, bezogen auf eine Tangente als Y-Axe, und den durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser als X-Axe *).

---

*) Es sind also, sowohl wenn $ac-b^2>$ oder <0, als auch wenn $ac-b^2=0$ ist, durch die neuen Coordinatenaxen X und Y conjugirte Richtungen in Beziehung auf die Curve (1) bestimmt, d. h. die Mittelpunkte aller einer dieser Axen parallelen Sehnen liegen auf einer geraden Linie, welche der anderen Axe parallel ist: die eine dieser Axen, $y+\frac{ae-bd}{ac-b^2}=0$ (4)

Anm. Weil:

$$(af-d^2)(ac-b^2)-(ae-bd)^2=a(acf-ae^2-cd^2-fb^2+2bef)=a\Delta,$$

so kann man, wenn a von Null verschieden ist, statt der Bedingungen $ac-b^2=0$ und $ae-bd=0$, auch sagen $ac-b^2=0$, $\Delta=0$.

§. 62. Besondere Fälle. Es sei jetzt $a=0$, ein Fall, der nie eintreten kann, wenn $ac-b^2$ positiv sein soll. Die Transformationen des vorigen Paragraphen sind alsdann unmöglich.

IV.*) Es sei $a=0$, b von Null verschieden, also $ac-b^2$ negativ.

Die linke Seite der Gleichung $2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ lässt sich dann immer auf die Form bringen:

$$(2bx+cy+\alpha)(y+\beta)+\gamma,$$

wo α, β, γ so bestimmt werden müssen, dass:

$$c\beta+\alpha=2e,\quad 2b\beta=2d,\quad \alpha\beta+\gamma=f$$

werden. Es folgt hieraus:

$$\beta=\frac{d}{b},\quad \alpha=2e-\frac{cd}{b}=\frac{2be-cd}{b},$$

$$\gamma=f-\frac{2ebd-cd^2}{b^2}=\frac{fb^2-2bed+cd^2}{b^2}.$$

Die vorgelegte Gleichung transformirt sich demnach in:

$$(10)\quad \left(2bx+cy+\frac{2be-cd}{b}\right)\left(y+\frac{d}{b}\right)-\frac{2bed-fb^2-cd^2}{b^2}=0.$$

---

oder $y+\frac{af-d^2}{2(ae-bd)}=0$ (8), ist parallel der ursprünglichen x-Axe, die zweite ist in allen drei Fällen:

$$ax+by+d=0;$$

diese Gerade ist demnach der x-Axe selbst conjugirt, und ebenso ergiebt sich, wenn man in dem ganzen Paragraphen die x-Axe und y-Axe vertauscht, die Linie:

$$bx+cy+e=0$$

als conjugirt der y-Axe in Beziehung auf die Curve (1). H.

*) Die Numerirung der Fälle und Gleichungen ist fortgesetzt.

Nimmt man von den beiden sich schneidenden Geraden:

$$2bx + cy + \frac{2be - cd}{b} = 0, \quad y + \frac{d}{b} = 0,$$

die erste zur X-Axe, die zweite zur Y-Axe eines neuen Coordinatensystems, so ist:

$$Y = \delta\left(2bx + cy + \frac{2be - cd}{b}\right), \quad X = \delta'\left(y + \frac{d}{b}\right),$$

dadurch verwandelt sich (10) in:

$$(11) \quad YX = \frac{\delta\delta'}{b^2}(2bed - fb^2 - cd^2).$$

1) Ist $2bed - fb^2 - cd^2 = 0$, so stellt die Gleichung zwei sich schneidende Gerade, die neuen Coordinatenaxen, dar. 2) Ist $2bed - fb^2 - cd^2$ von Null verschieden, so ist (11) die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten (§. 45, III.). Da nun $2bed - fb^2 - cd^2$ der Werth von Δ oder $acf - ae^2 - cd^2 - fb^2 + 2bde$ für $a = 0$ ist, so stimmen beide Fälle mit II, 1 und 2 überein.

V. Es sei $a = 0$, $ac - b^2 = 0$, also auch $b = 0$; c aber sei von Null verschieden.

Statt dieses speciellen Falles behandeln wir den allgemeineren, dass $ac - b^2 = 0$, und c von Null verschieden ist, indem wir die Werthe von a und b dabei ganz ausser Acht lassen. Die Gleichung (1) lässt sich in diesem Falle schreiben:

$$(12) \quad c\left(y + \frac{b}{c}x + \frac{e}{c}\right)^2 + 2\frac{cd - be}{c}x + \frac{cf - e^2}{c} = 0.$$

Weil:

$$(ac - b^2)(cf - e^2) - (cd - be)^2 = c\Delta,$$

so lässt (12) eine ganz ähnliche Discussion zu wie (6), nur dass überall $cf - e^2$ an die Stelle von $af - d^2$ tritt. Auch hier sind vier Fälle möglich, wie in III.

Die Gleichung:

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

umfasst hiernach folgende Fälle:

Bedeutung.	Bedingungen.
1) ohne geometrische Bedeutung	$ac-b^2>0,\ \Delta \gtrless 0,\ \frac{\Delta}{a}>0;$
	$ac-b^2=0,\ \Delta=0,\ a\gtrless 0,\ af-d^2>0;$
	$ac-b^2=0,\ \Delta=0,\ c\gtrless 0,\ cf-e^2>0.$
2) ein Punkt. . . .	$ac-b^2>0,\ \Delta=0.$
3) eine doppelte Gerade	$ac-b^2=0,\ \Delta=0,\ a\gtrless 0,\ af-d^2=0;$
	$ac-b^2=0,\ \Delta=0,\ c\gtrless 0,\ cf-e^2=0.$
4) zwei parallele Gerade	$ac-b^2=0,\ \Delta=0,\ a\gtrless 0,\ af-d^2<0;$
	$ac-b^2=0,\ \Delta=0,\ c\gtrless 0,\ cf-e^2<0.$
5) zwei sich schneidende Gerade .	$ac-b^2<0,\ \Delta=0.$
6) eine Ellipse . .	$ac-b^2>0,\ \Delta\gtrless 0,\ \frac{\Delta}{a}<0.$
7) eine Parabel. .	$ac-b^2=0,\ \Delta\gtrless 0.$
8) eine Hyperbel .	$ac-b^2<0,\ \Delta\gtrless 0.$

Wir sehen demnach, dass die allgemeinste Gleichung zweiter Ordnung keine anderen Linien enthält, als die wir in den vorhergehenden Kapiteln kennen gelernt haben *).

Anm. Von wesentlicher Bedeutung für das Folgende ist die Bedingungsgleichung $\Delta = 0$. Es lässt sich nachweisen, dass das Bestehen derselben erforderlich und hinreichend ist, damit der Ausdruck:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$$

in zwei Factoren $(lx+my+n)\ (l'x+m'y+n')$ zerlegt werden kann. Wir wollen die Richtigkeit dieser Behauptung unabhängig von dem Vorhergehenden beweisen.

Es sei zuerst $a\gtrless 0$. Da ll' nothwendig $=a$ ist, und das Product der beiden Factoren ungeändert bleibt, wenn der erste mit l, der andere mit l' dividirt und das ganze Product mit a multi-

*) Dieselben werden unter dem allgemeinen Namen Kegelschnitte zusammengefasst, weil sie bekanntlich zuerst als die ebenen Durchschnitte eines Kreiskegels betrachtet worden sind, und man spricht darum auch von der Gleichung (1) als der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte. H.

plicirt wird, so kann im Falle der Zerlegbarkeit folgende Form der Factoren angenommen werden:

$$a(x+\mu y+\nu)(x+\mu' y+\nu').$$

Vergleicht man:

$$a(x+\mu y+\nu)(x+\mu' y+\nu')$$

und:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f,$$

so sieht man, dass eine Zerlegung des zweiten Ausdrucks nur dann, dann aber auch immer möglich ist, wenn man durch vier Grössen μ, ν, μ', ν' den fünf Gleichungen genügen kann:

$$(13)\quad \begin{cases} \mu+\mu'=\dfrac{2b}{a}, \quad \mu\mu'=\dfrac{c}{a}, \quad \nu+\nu'=\dfrac{2d}{a}, \quad \nu\nu'=\dfrac{f}{a}, \\ \mu\nu'+\mu'\nu=\dfrac{2e}{a}. \end{cases}$$

Die vier ersten Gleichungen bestimmen μ, μ', ν, ν' durch Auflösung der quadratischen Gleichungen:

$$(14)\quad m^2-\frac{2b}{a}m+\frac{c}{a}=0, \quad n^2-\frac{2d}{a}n+\frac{f}{a}=0.$$

Weil ferner:

$$\mu\nu'+\mu'\nu+\mu\nu+\mu'\nu'=(\mu+\mu')(\nu+\nu')=\frac{4bd}{a^2},$$

$$\begin{aligned}(\mu\nu'+\mu'\nu)(\mu\nu+\mu'\nu') &= (\mu^2+\mu'^2)\nu\nu'+(\nu^2+\nu'^2)\mu\mu' \\ &= (\mu+\mu')^2\nu\nu'+(\nu+\nu')^2\mu\mu'-4\mu\mu'\nu\nu' \\ &= \frac{4b^2f}{a^3}+\frac{4d^2c}{a^3}-\frac{4acf}{a^3},\end{aligned}$$

so sind $\mu\nu'+\mu'\nu$ und $\mu\nu+\mu'\nu'$ Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$z^2-\frac{4bd}{a^2}z+\frac{4}{a^3}(b^2f+d^2c-acf)=0.$$

Befriedigt der Werth $z=\dfrac{2e}{a}$ diese Gleichung, so wird auch die letzte Gleichung in (13) erfüllt und umgekehrt. Also ist die erforderliche und ausreichende Bedingung für die Zerlegbarkeit:

$$\frac{4e^2}{a^2}-\frac{8bde}{a^3}+\frac{4(b^2f+d^2c-acf)}{a^3}=0,$$

oder:

$$(15)\quad acf-ae^2-cd^2-fb^2+2bde=\Delta=0.$$

Ist zweitens $a = 0$, b aber $\gtrless 0$, so haben im Falle der Zer legbarkeit die Factoren von $2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$ die Form:

$$2b(x + \mu y + \nu)(y + \nu').$$

Die Vergleichung der entsprechenden Glieder giebt:

$$2b\mu = c, \quad b\nu' = d, \quad 2b(\mu\nu' + \nu) = e, \quad 2b\nu\nu' = f,$$

oder:

$$\mu = \frac{c}{2b}, \quad \nu' = \frac{d}{b}, \quad \nu = \frac{e}{b} - \frac{cd}{2b^2} \text{ und: } 2d\left(\frac{e}{b} - \frac{cd}{2b^2}\right) = f.$$

Die letzte Gleichung, welche nach einiger Reduction in:

$$-cd^2 - fb^2 + 2bde = 0$$

übergeht, ist die Bedingung für die Zerlegbarkeit. Sie stimmt mit (15) überein, wenn dort $a = 0$ gesetzt wird.

Sind a und $b = 0$, aber $c \gtrless 0$, so erfordert die Zerlegbarkeit von $cy^2 + 2dx + 2ey + f$, wie man sich leicht überzeugt, dass $d = 0$ sei. Sind aber $a = b = d = 0$, so ist (15) befriedigt.

Die Bedingung $\Delta = 0$ ist also für die Zerlegbarkeit der linken Seite in (1) nothwendig und ausreichend. Die erhaltenen Factoren selbst sind jedoch nicht immer reell; wie sich unter anderem durch die Betrachtung der quadratischen Gleichung (14) ergiebt.

Wir gehen jetzt zu der Aufgabe über, wenn die Gleichung (1) einer Curve zweiter Ordnung zwischen schiefwinkligen Coordinaten gegeben ist, dieselbe auf eine der beiden Gleichungen zwischen rechtwinkligen Coordinaten zu reduciren:

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1, \quad Y^2 = 2PX;$$

eine Aufgabe, deren Lösung immer möglich sein muss, da wir schon gesehen haben, dass jede Curve zweiter Ordnung eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist.

§. 63. Reduction auf den Mittelpunkt. Man sagt, ein Punkt O sei Mittelpunkt einer Curve, wenn zu jedem Curvenpunkte A ein zweiter auf der Verlängerung von AO liegender Curvenpunkt A' gehört, so dass $AO = A'O$ ist. Ist ein solcher Mittelpunkt vorhanden und zugleich Anfangspunkt der Coordinaten, so muss die Gleichung der Curve, wenn sie durch (x, y) befriedigt wird, auch durch $(-x, -y)$ befriedigt werden, d. h. die Gleichung der Curve muss richtig bleiben, wenn man überall $-x$, $-y$ statt x, y schreibt.

Wendet man dies auf unsere allgemeine Curve der zweiten Ordnung an, so ergiebt sich, dass wenn das Werthepaar (x, y) der Gleichung:

$$(1)\quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

genügt, auch die Gleichung:

$$(1^*)\quad ax^2 + 2bxy + cy^2 - 2dx - 2ey + f = 0,$$

befriedigt werden muss; diese beiden Gleichungen können aber offenbar nur neben einander bestehen, wenn $d = 0$ und $e = 0$ ist; die andere Folgerung $a = b = c = f = 0$ ist natürlich zu verwerfen. Fehlen also in einer Gleichung zweiter Ordnung die Glieder der ersten Dimension, so ist der Anfangspunkt Mittelpunkt der Curve. Umgekehrt, hat die Curve einen Mittelpunkt, so müssen, wenn man ihn zum Anfangspunkte wählt, die Glieder der ersten Dimension fehlen. Für ein paralleles Coordinatensystem x', y' mit dem Anfangspunkte (ξ, η) hat man $x - \xi = x'$, $y - \eta = y'$; oder $x = x' + \xi$, $y = y' + \eta$. Diese Werthe in (1) substituirt, ergeben:

$$(2)\quad ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2x'(a\xi + b\eta + d) + 2y'(b\xi + c\eta + e)$$
$$+ a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + 2d\xi + 2e\eta + f = 0.$$

Hat (1) einen Mittelpunkt, so muss es möglich sein, (ξ, η) so zu wählen, dass die Glieder der ersten Ordnung in (2) fortfallen. Dies giebt die Gleichungen:

$$(3)\quad a\xi + b\eta + d = 0, \qquad b\xi + c\eta + e = 0,$$

woraus:

$$(4)\quad \xi = \frac{be - cd}{ac - b^2}, \quad \eta = \frac{bd - ae}{ac - b^2}.$$

Diese Auflösungen der Gleichungen (3) sind ohne alle Zweideutigkeit möglich, wenn $ac - b^2$ von Null verschieden ist. In diesem Falle, den wir jetzt ausschliesslich behandeln, hat also (1) einen Mittelpunkt, dessen Coordinaten in (4) angegeben sind. Setzt man die Werthe von ξ und η in (2) ein, so verschwinden zunächst (wegen (3)) die mit $2x'$ und $2y'$ multiplicirten Glieder, und das letzte Glied:

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + 2d\xi + 2e\eta + f$$
$$= \xi(a\xi + b\eta + d) + \eta(b\xi + c\eta + e) + d\xi + e\eta + f,$$

geht wegen (3) in:

$$d\xi + e\eta + f = d\frac{be - cd}{ac - b^2} + e\frac{bd - ae}{ac - b^2} + f$$

$$= \frac{acf - ae^2 - cd^2 - fb^2 + 2bde}{ac - b^2} = \frac{\varDelta}{ac - b^2}$$

über. Also verwandelt sich (2) in:

$$(5) \quad ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + \frac{\varDelta}{ac - b^2} = 0 \text{*)}.$$

§. 64. **Möglichkeit der Transformation in rechtwinklige Hauptaxen als Coordinatenaxen.** Der Ausdruck $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$ geht durch jede Coordinatenveränderung, bei welcher der Anfangspunkt fest bleibt, in die Form über $pX^2 + 2qXY + rY^2$. Man kann nun immer ein solches rechtwinkliges System (X, Y) wählen, dass nach erfolgter Transformation das mit XY multiplicirte Glied fehlt, oder der Coefficient $q = 0$ wird.

In der That, es sei der Winkel $(X, x') = \alpha$, $(Y, x') = 90^0 + \alpha$, $(y', x') = \varphi$, also φ der Coordinatenwinkel des gegebenen Systems, dann ist (§. 58, 8):

---

*) Wohl zu beachten ist, dass bei dieser Transformation durch Verlegung des Anfangspunktes die Glieder der höchsten Dimension ungeändert bleiben. Wenn nunmehr $ac - b^2$ negativ, d. h. der Kegelschnitt (1) eine Hyperbel ist, so stellt $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ das System zweier den Asymptoten paralleler Geraden vor; denn verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt, so wird die Gleichung des Kegelschnitts, wenn man statt $\frac{\varDelta}{ac - b^2}$ kurz $-m$ einführt:

$$ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = m;$$

die linke Seite lässt sich jetzt in zwei Factoren mit reellen Coefficienten zerlegen; bezeichnet man diese durch X und Y, so wird die Gleichung der Hyperbel:

$$X.Y = m,$$

d. h. die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen (§. 45, III.); also stellt die Gleichung:

$$X.Y = ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = 0$$

die Asymptoten selbst dar und demnach $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ das System zweier den Asymptoten paralleler Geraden. H.

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sin\varphi}\{X\sin(\varphi-\alpha) - Y\cos(\varphi-\alpha)\}, \\ y' = \dfrac{1}{\sin\varphi}\{X\sin\alpha + Y\cos\alpha\}. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe in $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$, so erhält man:

$$(2) \quad ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 = pX^2 + 2qXY + rY^2,$$

wo:

$$(3) \quad \begin{cases} p = \dfrac{1}{\sin\varphi^2}\{a\sin(\varphi-\alpha)^2 + 2b\sin(\varphi-\alpha)\sin\alpha + c\sin\alpha^2\}, \\ r = \dfrac{1}{\sin\varphi^2}\{a\cos(\varphi-\alpha)^2 - 2b\cos(\varphi-\alpha)\cos\alpha + c\cos\alpha^2\}, \\ q = \dfrac{1}{\sin\varphi^2}\{-a\sin(\varphi-\alpha)\cos(\varphi-\alpha) \\ \qquad + b(\sin(\varphi-\alpha)\cos\alpha - \cos(\varphi-\alpha)\sin\alpha) \\ \qquad + c\sin\alpha\cos\alpha\}. \end{cases}$$

Nun lässt sich über den Winkel α jedesmal so disponiren, dass $q = 0$ wird. Die Gleichung $q = 0$ kann nämlich geschrieben werden:

$$-\frac{a}{2}\sin(2\varphi - 2\alpha) + b\sin(\varphi - 2\alpha) + \tfrac{1}{2}c\sin 2\alpha = 0,$$

oder:

$$(4) \quad -a\sin(2\varphi - 2\alpha) + 2b\sin(\varphi - 2\alpha) + c\sin 2\alpha = 0,$$

woraus:

$$-a(\sin 2\varphi\cos 2\alpha - \cos 2\varphi\sin 2\alpha) + 2b(\sin\varphi\cos 2\alpha - \cos\varphi\sin 2\alpha) \\ + c\sin 2\alpha = 0,$$

also:

$$(5) \quad \sin 2\alpha(a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c) - \cos 2\alpha(a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi) = 0,$$

und schliesslich:

$$(6) \quad \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi}{a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c}.$$

Da die Tangente alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so wird es immer möglich sein, einen spitzen oder stumpfen Winkel ε zu bestimmen, dessen Tangente dem Bruche rechts gleich ist.

Weil nun aber alle Winkel, die sich um Vielfache von 180^0 unterscheiden, dieselbe Tangente haben, d. h. weil $\operatorname{tang}(\varepsilon + n \cdot 180^0) = \operatorname{tang} \varepsilon$ ist, so wird man haben $2\alpha = \varepsilon$, $2\alpha = \varepsilon + 180^0$ u. s. w., oder:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{2} + 90^0, \quad \alpha = \frac{\varepsilon}{2} + 180^0, \text{ u. s. w.}$$

Diese verschiedenen Lösungen von (6) haben für uns jedoch nur den Werth einer einzigen; denn da $\alpha = (X, x')$, so sind die Halbaxen $+X$, $+Y$, $-X$, $-Y$, wie sie z. B. die zweite Lösung ergiebt, der Reihe nach die Y-, $-X$-, $-Y$-, X-Axen, wie sie die erste Lösung bestimmt. Offenbar bleibt aber ein Ausdruck wie $pX^2 + rY^2$ immer von derselben Form (d. h. ohne Glied XY), welche Theile des Axenkreuzes man auch als $+X$- und $+Y$-Axe ansehen mag.

§. 65. Ausführung der Transformation. Um die Transformation wirklich auszuführen, deren Möglichkeit wir jetzt nachgewiesen haben, dazu bietet sich zuvörderst der Weg, aus (6)*) die Werthe von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin(\varphi-\alpha)$, $\cos(\varphi-\alpha)$ und endlich die von p und q zu berechnen. Wir ziehen es jedoch vor, die drei Gleichungen (3) direct zu behandeln und aus ihnen die Werthe von p, r, α vermittelst a, b, c und φ zu bestimmen. Addirt und subtrahirt man die Werthe für p und r, so erhält man:

$$(7) \begin{cases} (r+p)\sin\varphi^2 = a + 2b(\sin(\varphi-\alpha)\sin\alpha - \cos(\varphi-\alpha)\cos\alpha) + c, \\ (r-p)\sin\varphi^2 = a(\cos(\varphi-\alpha)^2 - \sin(\varphi-\alpha)^2) \\ \qquad - 2b(\cos(\varphi-\alpha)\cos\alpha + \sin(\varphi-\alpha)\sin\alpha) \\ \qquad + c(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2), \end{cases}$$

oder:

$$(8) \quad (r+p)\sin\varphi^2 = a - 2b\cos\varphi + c,$$

$$(9) \quad (r-p)\sin\varphi^2 = a\cos(2\varphi-2\alpha) - 2b\cos(\varphi-2\alpha) + c\cos 2\alpha.$$

Löst man $\cos(2\varphi-2\alpha)$ und $\cos(\varphi-2\alpha)$ auf, so kann (9) geschrieben werden:

$$(10) \quad (r-p)\sin\varphi^2 = \cos 2\alpha\,(a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c) \\ \qquad + \sin 2\alpha\,(a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi),$$

---

*) Wir setzen die Numerirung der Formeln aus §. 64 fort.

nun ist zufolge (5):

$$0 = \sin 2\alpha(a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c) - \cos 2\alpha(a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi);$$

wenn man also:

$$\cos 2\alpha \times (10) + \sin 2\alpha \times (5) \quad \text{und:} \quad \sin 2\alpha \times (10) - \cos 2\alpha \times (5)$$

bildet, so erhält man:

$$(11) \quad \begin{cases} (r-p)\sin\varphi^2 \cos 2\alpha = a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c, \\ (r-p)\sin\varphi^2 \sin 2\alpha = a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi, \end{cases}$$

oder:

$$(12) \quad \begin{cases} \cos 2\alpha = \dfrac{a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c}{(r-p)\sin\varphi^2}, \\[2ex] \sin 2\alpha = \dfrac{a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi}{(r-p)\sin\varphi^2}. \end{cases}$$

Quadrirt man die Gleichungen (11) und addirt sie, so erhält man:

$$(13) \quad (r-p)^2\sin\varphi^4 = (a\cos 2\varphi - 2b\cos\varphi + c)^2 + (a\sin 2\varphi - 2b\sin\varphi)^2.$$

Die Gleichungen (8) und (13) geben $r+p$ und $r-p$ durch bekannte Grössen, also auch r und p; die Formeln werden aber noch einfacher, wenn man die quadratische Gleichung sucht, deren Wurzeln r und p sind. Wir haben zufolge (13):

$$\begin{aligned}(r-p)^2\sin\varphi^4 &= a^2\cos 2\varphi^2 - 4ab\cos 2\varphi\cos\varphi + 4b^2\cos\varphi^2 \\ &\quad + 2ac\cos 2\varphi - 4bc\cos\varphi + c^2 \\ &\quad + a^2\sin 2\varphi^2 - 4ab\sin 2\varphi\sin\varphi + 4b^2\sin\varphi^2, \\ &= a^2 - 4ab\cos\varphi + 4b^2 + 2ac\cos 2\varphi - 4bc\cos\varphi + c^2;\end{aligned}$$

andererseits ist (8):

$$(r+p)^2\sin\varphi^4 = a^2 - 4ab\cos\varphi + 4b^2\cos\varphi^2 + 2ac - 4bc\cos\varphi + c^2,$$

also:

$$\begin{aligned}(r+p)^2\sin\varphi^4 - (r-p)^2\sin\varphi^4 &= 4b^2(\cos\varphi^2 - 1) + 2ac(1 - \cos 2\varphi) \\ &= -4b^2\sin\varphi^2 + 4ac\sin\varphi^2,\end{aligned}$$

und weil:

$$(r+p)^2 - (r-p)^2 = 4rp,$$

so ergiebt sich:

$$(14) \quad rp\sin\varphi^2 = ac - b^2;$$

da nun:

$$r+p=\frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2},\qquad rp=\frac{ac-b^2}{\sin\varphi^2},$$

so sind r und p Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(15)\quad z^2-z\frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2}+\frac{ac-b^2}{\sin\varphi^2}=0.$$

Da zufolge (8) und (13) $r+p$ und $r-p$ stets reell sind, so hat (15) stets reelle Wurzeln. Die Wurzeln von (15) werden gleich sein, wenn $r-p=0$ ist. Diese Bedingung zerfällt offenbar zufolge (13) in die beiden folgenden:

$$a\cos 2\varphi-2b\cos\varphi+c=0,\quad a\sin 2\varphi-2b\sin\varphi=0,$$

oder:

$$a(2\cos\varphi^2-1)-2b\cos\varphi+c=0,\quad 2a\sin\varphi\cos\varphi-2b\sin\varphi=0.$$

Die letzte giebt:

$$b=a\cos\varphi;$$

setzt man diesen Werth in die erste ein, so hat man $a=c$; also hat (15) nur dann gleiche Wurzeln, wenn:

$$(16)\quad a=c\quad \text{und:}\quad b=a\cos\varphi$$

ist. Die transformirte Gleichung $pX^2+rY^2+\frac{\Delta}{ac-b^2}=0$ wird aber für $p=r$ im Allgemeinen die eines Kreises. Stellt demnach die Gleichung zweiter Ordnung eine Curve dar, und finden die Gleichungen (16) statt, so ist die Curve ein Kreis.

Nachdem wir in der quadratischen Gleichung (15) die einfachste Angabe der Werthe von p und r aufgestellt haben, wollen wir auch die Bestimmung des Winkels α weiter verfolgen.

Schreibt man den Zähler von $\cos 2\alpha$ (12):

$$a(1-2\sin\varphi^2)-2b\cos\varphi+c=(r+p)\sin\varphi^2-2a\sin\varphi^2$$

und für $\cos 2\alpha$ den Ausdruck $\cos\alpha^2-\sin\alpha^2$, so kommt:

$$\cos\alpha^2-\sin\alpha^2=\frac{r+p-2a}{r-p};$$

nun ist:

$$\cos\alpha^2+\sin\alpha^2=1,$$

woraus:

$$(17)\quad \cos\alpha^2 = \frac{r-a}{r-p}, \qquad \sin\alpha^2 = \frac{a-p}{r-p}.$$

Statt des Zählers in $\sin 2\alpha$ oder $2\sin\alpha\cos\alpha$ (12) kann man schreiben $2\sin\varphi(a\cos\varphi - b)$, folglich ist:

$$(18)\quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{a\cos\varphi - b}{\sin\varphi(r-p)}.$$

Bestimmt man demnach $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ vermittelst (17), so ist die Wahl der Vorzeichen bei Ausziehung der Quadratwurzeln so zu treffen, dass (18) befriedigt wird.

Denken wir uns in der dritten Gleichung (3) statt q Null gesetzt, so bleiben die drei Gleichungen (3) ungeändert, wenn überall statt a, c, α bezüglich c, a, $\varphi - \alpha$ gesetzt werden. In der That, p und r bleiben ganz ungeändert, und die rechte Seite der letzten dieser Gleichungen nimmt das entgegengesetzte Zeichen an, was wegen $q = 0$ gleichgültig ist. Da (17) und (18) aber unmittelbare Folgen jener Gleichungen sind, so können wir auch hier diese Vertauschung vornehmen und erhalten:

$$(19)\quad \begin{cases} \cos(\varphi-\alpha)^2 = \dfrac{r-c}{r-p}, \qquad \sin(\varphi-\alpha)^2 = \dfrac{c-p}{r-p}, \\ \sin(\varphi-\alpha)\cos(\varphi-\alpha) = \dfrac{c\cos\varphi - b}{\sin\varphi(r-p)}. \end{cases}$$

Da $\cos(\varphi - \alpha)$ durch $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ bestimmt ist, so kann man bei der Wurzelausziehung in (19) nicht ein beliebiges Vorzeichen nehmen. In der That ist:

$$\cos\alpha\cos(\varphi-\alpha) = \cos\varphi\cos\alpha^2 + \sin\varphi\cos\alpha\sin\alpha$$

und:

$$\sin\alpha\sin(\varphi-\alpha) = \sin\varphi\sin\alpha\cos\alpha - \cos\varphi\sin\alpha^2,$$

oder mit Berücksichtigung von (17) und (18):

$$(20)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos(\varphi-\alpha) = \dfrac{r\cos\varphi - b}{r-p}, \\ \sin\alpha\sin(\varphi-\alpha) = \dfrac{p\cos\varphi - b}{r-p}. \end{cases}$$

Diese Formeln bestimmen die Wahl des Vorzeichens für $\cos(\varphi - \alpha)$ und $\sin(\varphi - \alpha)$.

Vergleicht man die Formeln (17), (19) und (20), so ergiebt sich:

$$(r-a)(r-c) = (r\cos\varphi - b)^2, \quad (p-a)(p-c) = (p\cos\varphi - b)^2,$$

d. h. r und p sind Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(21) \quad (z-a)(z-c)-(z\cos\varphi - b)^2 = 0,$$

welche Gleichung nach Auflösung der Klammern mit (15) genau übereinstimmt.

§. 66. **Die Fälle** $ac-b^2>0$ **und** <0. Wir haben in dem vorhergehenden Paragraphen alle bei der Transformation des Ausdruckes $ax'^2+2bx'y'+cy'^2$ in pX^2+rY^2 vorkommenden Winkelfunctionen durch a, b, c, φ, p und r ausgedrückt, diese beiden letzten Grössen aber als Wurzeln der quadratischen Gleichung gegeben:

$$z^2 - \frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2}z + \frac{ac-b^2}{\sin\varphi^2} = 0.$$

Es sei nun erstens $ac-b^2$ positiv gleich λ^2, so werden, da $pr = \frac{ac-b^2}{\sin\varphi^2}$, p und r gleiches Zeichen haben, und weil:

$$\begin{aligned} a(p+r)\sin\varphi^2 &= a^2-2ab\cos\varphi+ac = a^2-2ab\cos\varphi+b^2+\lambda^2 \\ &= (a-b\cos\varphi)^2+b^2\sin\varphi^2+\lambda^2, \end{aligned}$$

also wesentlich positiv ist, so haben in diesem Falle p und r gleiches Zeichen mit a. Ist aber $ac-b^2$ negativ, so haben p und r entgegengesetztes Vorzeichen.

Hat man demnach die Gleichung:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

durch parallele Verrückung des Coordinatensystems auf die Form gebracht $ax'^2+2bx'y'+cy'^2+\frac{\varDelta}{ac-b^2}=0$, und durch Einführung des passenden rechtwinkligen Systems mit demselben Anfangspunkte auf $pX^2+rY^2+\frac{\varDelta}{ac-b^2}=0$, so braucht man nur zu setzen:

$$\frac{-p(ac-b^2)}{\varDelta}=\frac{1}{A},\qquad \frac{-r(ac-b^2)}{\varDelta}=\frac{1}{B},$$

um schliesslich eine Gleichung zu erhalten von der Form:

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1;$$

dies setzt natürlich voraus, dass $\varDelta \gtrless 0$ ist. Ist dies erfüllt, so haben A und B gleiches Zeichen, wenn $ac-b^2$ positiv ist, und zwar sind beide positiv, wenn $\frac{p}{\varDelta}, \frac{q}{\varDelta}$ negativ sind; da aber ap, ar nach einer vorhergehenden Bemerkung gewiss positiv sind, und $\frac{p}{\varDelta}=\frac{ap}{a\varDelta}$, so werden A und B beide positiv sein, wenn $\varDelta$ und a entgegengesetztes Zeichen haben. Die Gleichung $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$ stellt alsdann eine Ellipse mit den Axen $2\sqrt{A}$, $2\sqrt{B}$ vor (vgl. §. 61, I. 3). Haben a und $\varDelta$ gleiches Zeichen, so sind A und B beide negativ, und die Gleichung $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$ ist ohne geometrische Bedeutung. Ist $ac-b^2$ negativ, so haben A und B ungleiches Zeichen und $\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$ ist die Gleichung einer Hyperbel. Die Discussion des Falles $\varDelta=0$ übergehen wir, da die Untersuchung von $pX^2+rY^2=0$ schon oben geführt worden ist (§. 61, I. 2; II. 1).

Vereinigen wir die gefundenen Resultate, so haben wir den Satz:

„Die quadratische Gleichung:

$$(1)\quad z^2-\frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2}z+\frac{ac-b^2}{\sin\varphi^2}=0,$$

„oder:

$$(z-a)(z-c)-(z\cos\varphi-b)^2=0$$

„hat stets zwei reelle Wurzeln p und r; mit Hilfe der„selben kann man einen Winkel α durch eine der Glei„chungen bestimmen:

$$(2)\begin{cases}\cos\alpha^2=\dfrac{r-a}{r-p}, & \sin\alpha^2=\dfrac{a-p}{r-p},\\[2mm] \cos(\varphi-\alpha)^2=\dfrac{r-c}{r-p}, & \sin(\varphi-\alpha)^2=\dfrac{c-p}{r-p},\\[2mm] \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{a\cos\varphi-b}{\sin\varphi\,(r-p)}, & \sin(\varphi-\alpha)\cos(\varphi-\alpha)=\dfrac{c\cos\varphi-b}{\sin\varphi(r-p)},\\[2mm] \cos\alpha\cos(\varphi-\alpha)=\dfrac{r\cos\varphi-b}{r-p}, & \\[2mm] \sin\alpha\sin(\varphi-\alpha)=\dfrac{p\cos\varphi-b}{r-p}, & \end{cases}$$

„welche in Folge der quadratischen Gleichung zusam-
„men bestehen.

„Macht man alsdann in der Gleichung zweiter Ord-
„nung:

$$(3)\quad ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

„die Substitution:

$$x=\frac{be-cd}{ac-b^2}+\frac{1}{\sin\varphi}\{X\sin(\varphi-\alpha)-Y\cos(\varphi-\alpha)\},$$
$$y=\frac{bd-ae}{ac-b^2}+\frac{1}{\sin\varphi}\{X\sin\alpha+Y\cos\alpha\},$$

„welches die Transformationsformeln eines schiefwink-
„ligen Systems (x, y) mit dem Coordinatenwinkel φ in
„ein rechtwinkliges (X, Y) sind, so geht (3) in:

$$(4)\quad \frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$$

„über, wo:

$$(5)\quad\begin{cases}A=-\dfrac{\varDelta}{p(ac-b^2)}, & B=-\dfrac{\varDelta}{r(ac-b^2)},\\[2mm] \varDelta=acf-ae^2-cd^2-fb^2+2bde & \end{cases}$$

„sind.“ Wir setzen hierbei voraus, dass $\varDelta$ und $ac-b^2$ von Null verschieden sind*), und dass (1) keine gleichen Wurzeln hat,

---

*) Ist $\varDelta=0$ und $ac-b^2$ von Null verschieden, so verschwinden A und B, d. h. es werden die Quadrate der Halbaxen des Kegelschnitts (4)

d. h. dass die beiden Gleichungen $a = c$, $a \cos\varphi = b$ nicht stattfinden. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass, wenn der ursprüngliche Coordinatenwinkel φ ein rechter ist, obige Formeln sich sehr vereinfachen.

§. 67. Der Fall $ac - b^2 = 0$. Ist $ac - b^2 = 0$, so kann man im Allgemeinen die Gleichung:

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

nicht auf einen Mittelpunkt beziehen; denn durch die Auflösung der Gleichungen (§. 63, 3):

$$(2) \quad a\xi + b\eta + d = 0, \quad b\xi + c\eta + e = 0$$

erhält man:

$$(3) \quad \xi = \frac{be - cd}{ac - b^2}, \quad \eta = \frac{bd - ae}{ac - b^2},$$

also wegen $ac - b^2 = 0$, für ξ und η unendliche Werthe. Ist jedoch $be - cd = 0$ und $bd - ae = 0$, so werden ξ und $\eta = \frac{0}{0}$, d. h. unbestimmt. In der That, die Bedingungen:

$$(4) \quad ac - b^2 = 0, \quad be - cd = 0, \quad bd - ae = 0$$

drücken aus, dass die linken Seiten der Gleichungen:

$$a\xi + b\eta + d = 0, \quad b\xi + c\eta + e = 0$$

sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Eine der beiden Gleichungen ist demnach überflüssig, und zur Bestimmung der beiden Grössen ξ und η bleibt nur die andere übrig. Es giebt demnach unzählig viele Punkte (ξ, η), welche als Mittelpunkte von (1) in diesem Falle angesehen werden können, und zwar liegen sie sämmtlich in einer Geraden. Vergleicht man die Bedingungen (4) mit den Relationen:

---

unendlich klein, während ihr Verhältniss $\frac{A}{B} = \frac{r}{p}$ endlich bleibt, je nachdem also $ac - b^2 > 0$ oder < 0 ist (§. 62, V.), lässt sich der Kegelschnitt (3) ansehen als eine Ellipse oder eine Hyperbel mit verschwindend kleinen Axen (vgl. §. 103). Im Besonderen kann man demnach jede zwei sich durchschneidende gerade Linien betrachten als eine Hyperbel, deren Axen sich auf Null reduciren, und in diesem Sinne den Schnittpunkt derselben als Mittelpunkt dieser Hyperbel ansehen. H.

$$(ac-b^2)(af-d^2)-(ae-bd)^2=a\Delta,$$
$$(ac-b^2)(cf-e^2)-(be-cd)^2=c\Delta,$$

so sieht man, dass aus denselben nothwendig $\Delta=0$ erfolgt. Die Gleichung (1) drückt also, wenn sie nicht jeder geometrischen Bedeutung entbehrt, zwei parallele Gerade aus; und in der That kann jeder Punkt, der auf einer Geraden liegt, welche von den beiden Parallelen gleich weit absteht, als Mittelpunkt des Systems angesehen werden.

Während also im Allgemeinen, wenn $ac-b^2=0$ ist, die Fortschaffung der Glieder erster Dimension nicht möglich ist, kann man wiederum ein rechtwinkliges Coordinatensystem (X, Y) mit demselben Anfangspunkte annehmen, so dass in der transformirten Gleichung das mit XY behaftete Glied fehlt. Die oben gefundenen Formeln vereinfachen sich wesentlich; denn die quadratische Gleichung (§. 65, 15) wird:

$$z^2-z\frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2}=0,\text{ oder: } z\left(z-\frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2}\right)=0;$$

sie hat also die beiden Wurzeln:

$$p=0,\quad r=\frac{a-2b\cos\varphi+c}{\sin\varphi^2},$$

und die Transformationsformeln werden:

$$x=\frac{1}{\sin\varphi}\{X\sin(\varphi-\alpha)-Y\cos(\varphi-\alpha)\},$$
$$y=\frac{1}{\sin\varphi}\{X\sin\alpha+Y\cos\alpha\},$$

wo:

$$\cos\alpha^2=\frac{a\cos\varphi^2-2b\cos\varphi+c}{a-2b\cos\varphi+c},\quad \sin\alpha^2=\frac{a\sin\varphi^2}{a-2b\cos\varphi+c},$$
$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\varphi(a\cos\varphi-b)}{a-2b\cos\varphi+c}\text{ u. s. w.}$$

Mit Hilfe derselben wird $ax^2+2bxy+cy^2$, wegen $p=0$, in rY^2 verwandelt, der Ausdruck erster Ordnung $2dx+2ey+f$ geht in einen ähnlichen $2DX+2EY+F$, also die ganze Gleichung (1) in:

$$(5)\quad rY^2+2DX+2EY+F=0$$

über. Schreibt man dafür:

$$(6)\quad r\left(Y+\frac{E}{r}\right)^2+2D\left(X-\frac{E^2}{2Dr}+\frac{F}{2D}\right)=0$$

und setzt:

$$\frac{E}{r}=-\eta,\quad -\frac{E^2}{2Dr}+\frac{F}{2D}=-\xi,\quad \frac{D}{r}=-P,$$

so wird daraus:

$$(Y-\eta)^2=2P(X-\xi),$$

welche Gleichung, wenn man im Punkte (ξ, η) neue, dem (X, Y)-Systeme parallele Axen annimmt, in die gewöhnliche Form der Parabelgleichung übergeht.

Die vorhergehende Transformation wird für $D=0$ unmöglich; in diesem Falle stellt die vorgelegte Gleichung keine Curve, sondern die in §. 62, IV. und V. erwähnten Ausnahmefälle dar.

§. 68. **Beispiele.** Als Anwendung der in den vorhergehenden Paragraphen entwickelten Theorie wollen wir die Gleichung zwischen schiefwinkligen Coordinaten:

$$(1)\quad \frac{x^2}{D_1^2}+\frac{y^2}{D^2}-1=0$$

untersuchen. Mit $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ verglichen, ergiebt sich:

$$a=\frac{1}{D_1^2},\quad b=0,\quad c=\frac{1}{D^2},\quad d=0,\quad e=0,\quad f=-1,$$

also ist:

$$ac-b^2=\frac{1}{D_1^2D^2},\quad acf-ae^2-cd^2-fb^2+2bde=\varDelta=-\frac{1}{D_1^2D^2}.$$

Die Gleichung ist schon auf den Mittelpunkt bezogen; um sie auf die rechtwinkligen Hauptaxen zu beziehen, ist die quadratische Gleichung:

$$(2)\quad z^2-\left(\frac{1}{D_1^2}+\frac{1}{D^2}\right)\frac{z}{\sin\varphi^2}+\frac{1}{D_1^2D^2}\,\frac{1}{\sin\varphi^2}=0,$$

aufzulösen. Sind die Wurzeln derselben p und q, so ist die Gleichung der Curve auf die Hauptaxen bezogen:

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}-1=0,$$

wo:

$$A = \frac{1}{p}, \qquad B = \frac{1}{q},$$

ist. Schreibt man demnach $z = \frac{1}{u}$, wodurch (2) in:

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u \sin\varphi^2}\left(\frac{1}{D_1^2} + \frac{1}{D^2}\right) + \frac{1}{D_1^2 D^2 \sin\varphi^2} = 0,$$

oder in:

$$(3) \quad u^2 - (D^2 + D_1^2)u + D^2 D_1^2 \sin\varphi^2 = 0$$

übergeht, so sind A und B die Wurzeln von (3); A und B sind aber die Quadrate der halben Axen einer Ellipse, deren conjugirte Durchmesser $2D_1$ und $2D$ sind und welche den Winkel φ mit einander bilden. Weil nun:

$$A + B = D^2 + D_1^2, \quad AB = D^2 D_1^2 \sin\varphi^2,$$

so folgt daraus, dass die Summe der Quadrate zweier conjugirten Halbmesser der Summe der Quadrate der Halbaxen, und dass das Parallelogramm zwischen zwei conjugirten Durchmessern ($4DD_1 \sin\varphi$) dem Rechtecke zwischen den Hauptaxen $\left(4\sqrt{AB}\right)$ gleich ist, was mit §. 34, IV. und V. übereinstimmt.

Als zweites Beispiel, dessen Durchführung wir dem Leser überlassen, möge die Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten dienen:

$$(4) \quad \sqrt{\frac{x}{l}} + \sqrt{\frac{y}{m}} = 1,$$

wo l und m positive Grössen bedeuten. Macht man die Gleichung rational, so erhält man:

$$(5) \quad \frac{x^2}{l^2} - 2\frac{xy}{lm} + \frac{y^2}{m^2} - 2\left(\frac{x}{l} + \frac{y}{m}\right) + 1 = 0.$$

Weil $ac - b^2 = 0$, so stellt (5) eine Parabel vor; man überzeugt sich leicht, da die Annahme von $y = 0$ die Gleichung (5) in $\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2 = 0$, oder in eine quadratische Gleichung mit zwei gleichen Wurzeln verwandelt, dass die Abscissenaxe Tangente der Curve ist; dasselbe gilt für die Ordinatenaxe. Die Transformationsformeln;

$$y = Y\frac{l}{n} + X\frac{m}{n} + \frac{l'm}{n^4},$$

$$x = -Y\frac{m}{n} + X\frac{l}{n} + \frac{m'l}{n^4},$$

$$n = \sqrt{l^2 + m^2},$$

verwandeln die Gleichung (5) in:

$$Y^2 = \frac{4l^2m^2}{n^3}X.$$

Neuntes Kapitel.

Fundamentalsätze aus der Theorie der Transversalen.

§. 69. Das Verhältniss $(ax_1 + by_1 + c):(ax_2 + by_2 + c)$. Wir haben gesehen (§. 6), dass, wenn (x, y), (x_1, y_1) und (x_2, y_2) drei Punkte a, b und c einer Geraden sind, die Gleichung stattfindet $\frac{x-x_1}{x-x_2} = \pm\frac{ab}{ac}$, $\frac{y-y_1}{y-y_2} = \pm\frac{ab}{ac}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem a ausserhalb oder innerhalb bc liegt. Nennen wir dies Verhältniss $\frac{ab}{ac}$ mit dem angemessenen Vorzeichen versehen λ, so ist $x - x_1 = \lambda(x - x_2)$, $y - y_1 = \lambda(y - y_2)$, woraus:

$$(1) \quad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}.$$

Eliminirt man aus diesen Formeln λ, so kommt man auf die Gleichung der Geraden, die durch b und c geht (§. 18, 3). — Es sei a oder (x, y) der Durchschnitt von bc und der Geraden:

$$(2) \quad \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Setzt man die Werthe aus (1) in (2) ein, so erhält man:

$$\alpha(x_1 - \lambda x_2) + \beta(y_1 - \lambda y_2) + \gamma(1-\lambda) = 0,$$

woraus:

$$(3)\quad \lambda = \frac{\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma}{\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma};$$

welchen Ausdruck man in (1) zu substituiren hat.

Ist:

$$(3^*)\quad \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma,$$

so wird $\lambda = 1$, und zufolge (1) $x = y = \infty$; d. h. (3*) ist die Bedingung, damit die durch (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gehende Gerade der Linie (2) parallel sei. Erinnert man sich der Bedeutung von λ, so folgt aus (3) der Satz:

Ist $p = 0$ die Gleichung einer Geraden; sind ferner p_1 und p_2 die Werthe, welche die linke Seite derselben annimmt, wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) oder die Coordinaten zweier beliebigen Punkte b und c statt der laufenden Coordinaten substituirt werden, und ist a der Durchschnitt von bc und der Geraden $p = 0$, so hat man:

$$\frac{p_1}{p_2} = \pm \frac{ab}{ac},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem a ausserhalb oder innerhalb bc liegt*).

§. 70. Anwendung. Hieraus folgt unmittelbar das in der Anmerkung zu §. 23 Gesagte; um auch die übrigen Bemerkungen aus jenem Paragraphen mit Hülfe dieses Satzes abzuleiten, fügen wir noch folgende einfache Betrachtungen hinzu. Sind b_1 und c_1 die Fusspunkte der von b und c auf die Gerade $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ (oder $p = 0$) gefällten Lothe, so ist in jedem Falle $\frac{ab}{ac} = \frac{bb_1}{cc_1}$,

*) Wenn man bei Bezeichnung einer geradlinigen Strecke AB festsetzt, dass durch den ersten Buchstaben jedesmal der Anfangspunkt und durch den zweiten Buchstaben ausser dem Endpunkt zugleich der Sinn der Richtung, in welchem die Strecke zu nehmen ist, ausgedrückt werden soll, so dass also $AB = -BA$ oder $AB + BA = 0$ ist, so kann man in dem obigen Paragraphen das doppelte Vorzeichen zur Bezeichnung des Verhältnisses $\lambda = \frac{p_1}{p_2} = \pm \frac{ab}{ac}$ erübrigen, weil, je nachdem der Punkt a ausserhalb oder innerhalb bc liegt, die Linien ab und ac gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, also ihr Verhältniss positiv oder negativ wird. Ebenso ist das Product $ab \,.\, ac$ als positiv oder negativ anzusehen, je nachdem a ausserhalb oder innerhalb bc liegt. H.

also nach dem vorhergehenden Satze $\frac{bb_1}{cc_1} = \pm \frac{p_1}{p_2}$. Wir wollen der Einfachheit halber b und c auf einer Seite der Geraden $p = 0$ annehmen, dann ist also $\frac{bb_1}{p_1} = \frac{cc_1}{p_2}$. Für einen dritten Punkt (x_3, y_3) oder d auf derselben Seite, der aber mit bc nicht in einer Geraden zu liegen braucht, hat man wieder $\frac{bb_1}{dd_1} = \frac{p_1}{p_3}$, also $\frac{bb_1}{p_1} = \frac{cc_1}{p_2} = \frac{dd_1}{p_3}$. Nennt man den Werth dieser gleichen Brüche ϱ, so ist also die Länge P_1 des von irgend einem Punkte (x_1, y_1) auf die Gerade $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ gefällten Lothes $= \varrho(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma)$, wo der Factor ϱ für alle Punkte auf derselben Seite der Geraden constant bleibt und — wie wir ohne weiteren Beweis hinzufügen — für alle Punkte der anderen Seite in $-\varrho$ übergeht.

Ist z. B. P_0 das vom Anfangspunkte auf die Gerade gefällte Loth, so hat man $P_0 = \varrho\gamma$, also:

$$P_1 = \pm \frac{P_0}{\gamma}(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem (x_1, y_1) mit dem Anfangspunkte auf derselben Seite der Geraden liegt oder nicht. Eine Vergleichung unserer jetzt erhaltenen Ausdrücke mit den früheren Formeln (z. B. §. 59, Form. 19) giebt für ϱ den Ausdruck:

$$\varrho = \pm \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\beta\cos\varphi + \beta^2}}.$$

Die Länge der von (x_1, y_1) unter dem Winkel ϑ nach $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ gezogenen Geraden ist $\frac{P_1}{\sin\vartheta}$, also gleich $\pm \frac{P_0}{\gamma \sin\vartheta}(\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma)$.

§. 71. Transversale durch eine geradlinige Figur. Es seien (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) die drei Ecken A, B, C eines Dreiecks (Fig. 49); die Gerade G, oder:

$$p = \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

schneide BC in A', AC in B', AB in C'; dann ist nach dem Satze des §. 69:

$$\pm\frac{AC'}{BC'}=\frac{p_1}{p_2},\qquad \pm\frac{BA'}{CA'}=\frac{p_2}{p_3},\qquad \pm\frac{CB'}{AB'}=\frac{p_3}{p_1}.$$

Die Multiplication dieser Gleichungen giebt rechts $+1$, also muss links das Vorzeichen Minus gar nicht oder zweimal vorkommen, d. h. von den drei Durchschnittspunkten A', B', C' der Geraden G mit den Seiten des Dreiecks ABC können nur entweder zwei oder keiner auf den Seiten des Dreiecks selbst vorkommen, und ausserdem ist:

$$(1)\qquad \frac{AC'\cdot BA'\cdot CB'}{BC'\cdot CA'\cdot AB'}=1.$$

Dies giebt folgenden Lehrsatz:

Die sechs Entfernungen zwischen den Ecken des Dreiecks A, B, C und den Durchschnitten A', B', C' einer Geraden G mit den Seiten desselben lassen sich in zwei Gruppen theilen (AC', BA', CB' und AB', BC', CA'), so dass die Entfernungen, welche eine Gruppe bilden, keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben; das Product aus den Stücken der einen Gruppe ist gleich dem Producte aus den Stücken der anderen.

Dieser Satz gestattet folgende Umkehrung:

Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks BC, CA, AB oder auf ihren Verlängerungen drei Punkte A', B', C' an — mit der Bedingung jedoch, dass auf den Seiten selbst zwei dieser Punkte liegen, oder keiner — und findet die Gleichung (1) statt, so liegen A', B', C' auf einer Geraden.

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

Der directe Satz gestattet eine Ausdehnung auf jedes Vieleck; wir wollen dieselbe an einem Viereck $ABCD$ (Fig. 50) nachweisen. Die Gerade G schneide die Seite AB in A', BC in B', CD in C', DA in D', so ist, mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung:

$$\pm\frac{AA'}{BA'}=\frac{p_1}{p_2},\qquad \pm\frac{BB'}{CB'}=\frac{p_2}{p_3},$$
$$\pm\frac{CC'}{DC'}=\frac{p_3}{p_4},\qquad \pm\frac{DD'}{AD'}=\frac{p_4}{p_1}.$$

Da das Product der rechten Seiten dieser Gleichungen $+1$

giebt, so schliessen wir wie oben, dass von den vier Durchschnitts-punkten nur eine gerade Anzahl auf den Seiten selbst liegen kann, und dass ausserdem:

$$AA' \cdot BB' \cdot CC' \cdot DD' = AD' \cdot BA' \cdot CB' \cdot DC'.$$

§. 72. **Gleichung einer Geraden, welche durch den Durchschnitt zweier anderen geht.** Sind p und q der Kürze halber die Ausdrücke $ax+by+c$, $a'x+b'y+c'$, ferner α und β zwei von x und y unabhängige constante Grössen, so stellen die Gleichungen:

$$(1)\quad p=0, \qquad (2)\quad q=0, \qquad (3)\quad \alpha p+\beta q=0$$

drei durch einen Punkt gehende Geraden dar.

In der That ist (3) wie (1) und (2) von der ersten Ordnung, und da der Durchschnittspunkt von (1) und (2) die Ausdrücke p und q gleich 0 macht, so genügt er auch der dritten Gleichung (§. 12).

Umgekehrt lässt sich die Gleichung jeder Geraden, welche durch den Durchschnitt von (1) und (2) geht, unter der Form (3) darstellen. Denn es sei (x_1, y_1) ein zweiter Punkt derselben, so kann man α und β so bestimmen, dass seine Coordinaten der Gleichung (3) genügen. Es ist dazu erforderlich, dass:

$$\alpha(ax_1+by_1+c)+\beta(a'x_1+b'y_1+c)=0, \text{ oder: } \alpha p_1+\beta q_1=0$$

sei; woraus $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{q_1}{p_1}$. Substituirt man diesen Werth in (3) oder in $\frac{\alpha}{\beta}p+q=0$, so erhält man:

$$(4)\quad \frac{p}{p_1}-\frac{q}{q_1}=0.$$

Die Form dieser Gleichung macht es ersichtlich, dass sie eine Gerade darstellt, welche durch (x_1, y_1) und den Durchschnitt von (1) und (2) geht. Jede andere Gleichung derselben Geraden könnte sich von (4) nur durch einen constanten Factor unterscheiden (§. 17, Anm.).

Anm. Die Gleichung $p+\lambda q=0$ stellt eben so allgemein wie (3) die Gleichung einer durch den Durchschnitt von (1) und (2) gehenden Geraden dar. Soll sie auch $q=0$ darstellen, so

muss man λ unendlich nehmen, wodurch in der That $\frac{p}{\lambda} + q = 0$ in $q = 0$ übergeht.

§. 73. **Transversalen durch einen Punkt und die Ecken eines Dreiecks.** Es seien wiederum x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Coordinaten der Ecken A, B, C eines Dreiecks (Fig. 51). Man ziehe durch einen beliebigen Punkt O die Geraden AO, BO, CO, welche die Gegenseiten in A', B', C' treffen. Die Gleichungen von BO und CO seien bezüglich $p = 0$, $q = 0$, also die von AO (§. 72) $\frac{p}{p_1} - \frac{q}{q_1} = 0$.

Wir haben ferner nach §. 69:

$$(1) \quad \pm \frac{BA'}{CA'} = \left(\frac{p_2}{p_1} - \frac{q_2}{q_1}\right) : \left(\frac{p_3}{p_1} - \frac{q_3}{q_1}\right).$$

Weil aber B in $p = 0$ liegt, so ist $p_2 = 0$; und ebenso findet sich $q_3 = 0$. Dadurch geht (1) über in:

$$\pm \frac{BA'}{CA'} = -\frac{q_2}{q_1} : \frac{p_3}{p_1} = -\frac{q_2}{q_1} \frac{p_1}{p_3},$$

oder:

$$(2) \quad \left(\pm \frac{BA'}{CA'}\right) \frac{q_1}{q_2} \frac{p_3}{p_1} = -1.$$

Es ist aber:

$$\frac{q_1}{q_2} = \pm \frac{AC'}{BC'}, \qquad \frac{p_3}{p_1} = \pm \frac{CB'}{AB'},$$

also:

$$\left(\pm \frac{BA'}{CA'}\right)\left(\pm \frac{AC'}{BC'}\right)\left(\pm \frac{CB'}{AB'}\right) = -1.$$

Da rechts -1 steht, so kann auf der linken Seite dieser Gleichung das negative Vorzeichen nur dreimal oder einmal vorkommen, d. h. von den Punkten A', B', C' liegen drei oder einer auf den Dreiecksseiten selbst, und ausserdem ist:

$$(3) \quad AC' \cdot BA' \cdot CB' = AB' \cdot BC' \cdot CA';$$

oder in Worten:

Wenn man die Ecken eines Dreiecks mit einem beliebigen Punkte verbindet, so bestimmen diese Geraden

auf den Seiten des Dreiecks sechs Segmente, so dass das Product dreier unter ihnen, welche keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, dem Producte der drei übrigen gleich ist.

Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks BC, CA, AB oder auf ihren Verlängerungen drei Punkte A', B', C' an — mit der Bedingung jedoch, dass auf den Seiten selbst eine ungerade Anzahl liegen soll — und findet die Gleichung (3) statt, so treffen sich AA', BB', CC' in einem Punkte.

Wir übergehen den Beweis dieser Umkehrung. — Um die weiteren Anwendungen des in §. 72 ausgesprochenen Princips nicht unterbrechen zu müssen, schalten wir die wesentlichsten Sätze über harmonische Punkte hier ein.

§. 74. Harmonische Punkte. Aus den Elementen ist bekannt, dass, wenn drei Punkte a, b, c in gerader Linie (etwa auf der Abscissenaxe) gegeben sind, man keinen vierten Punkt d finden kann, der mit b gleichzeitig innerhalb oder ausserhalb ac läge, und für den die Proportion:

$$(1) \quad \frac{da}{dc} = \frac{ba}{bc}$$

stattfände. Dies kommt, wenn wir x, x_1, x_2, x_3 die Abscissen von a, b, c, d nennen, analytisch genommen, darauf hinaus, dass, wenn x_1 und x_3, x und x_2 verschiedene Grössen sind, die Gleichung $\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$, welche mit (1) gleichbedeutend ist (§. 6), unmöglich stattfinden kann; sie reducirt sich nämlich nach Fortschaffung der Nenner auf $(x_3 - x_1)(x_2 - x) = 0$. Setzt man aber fest, dass d ausserhalb ac liegen soll, wenn b innerhalb ist, und umgekehrt, so lässt sich die Gleichung (1) immer und nur auf eine einzige Weise erfüllen; diese neue Festsetzung verlangt nämlich, dass die Brüche $\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2}$ und $\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2}$ gleichen Zahlenwerth, aber entgegengesetztes Zeichen haben sollen, oder dass:

$$(2) \quad \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} = 0,$$

woraus folgt:

$$(3) \quad x_3 = \frac{2xx_2 - x_1(x + x_2)}{x + x_2 - 2x_1}.$$

In Bezug auf die Strecke bd liegen von den beiden Punkten a und c ebenfalls der eine innerhalb, der andere ausserhalb, und da man die Proportion (1) auch $\frac{ad}{ab} = \frac{cd}{cb}$ schreiben kann, so sehen wir, dass die Punkte a und c ihrer Lage nach zu der Strecke bd sich ebenso verhalten, wie die Punkte b und d zu der Strecke ac.

Zwei Punktepaare einer Geraden (wie a und c, b und d) heissen vier *harmonische Punkte*, wenn die Entfernungen des einen Paares von dem einen Punkte des anderen, den entsprechenden Entfernungen von dem anderen Punkte proportional sind; die Punkte eines jeden Paares heissen *conjugirte* *). Vermittelst (3) kann man, wenn drei der vier harmonischen Punkte bekannt sind, den letzten ohne Zweideutigkeit bestimmen. Ist jedoch:

$$x + x_2 - 2x_1 = 0,$$

d. h. ist b die Mitte von ac (§. 6), so wird x_3 unendlich; man sagt daher, dass der Mitte von ac der unendlich entfernte Punkt der Geraden conjugirt sei.

Aus den Gleichungen (2) und (3) lassen sich durch passende Wahl des Anfangspunktes der Abscissen neue Eigenschaften von vier harmonischen Punkten ableiten, von denen wir wenigstens zwei mittheilen wollen. Lässt man den Anfangspunkt mit a zusammenfallen, so wird $x = 0$; dadurch verwandelt sich (2) in:

$$\frac{x_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_3}{x_2 - x_3} = 0, \quad \text{oder:} \quad x_1 x_2 + x_3 x_2 - 2x_1 x_3 = 0,$$

woraus durch Division mit $2x_1 x_2 x_3$:

$$(4) \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_3}\right).$$

---

*) Setzt man fest, dass die geradlinigen Strecken da, dc, ba, bc zugleich deren Richtung ausdrücken (§. 69, Anm.), so hat man zur Definition der beiden harmonischen Punktepaare a, c und b, d die Gleichung:

$$\frac{da}{dc} = -\frac{ba}{bc} \quad \text{oder:} \quad \frac{da}{dc} + \frac{ba}{bc} = 0. \qquad \text{H.}$$

Lässt man den Anfangspunkt mit b zusammenfallen, oder macht in (2) $x_1 = 0$, so erhält man:

$$\frac{1}{x_3} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x_2}\right)$$

u. s. w., nimmt man also einen von vier harmonischen Punkten zum Anfangspunkte und bildet die reciproken Werthe der Abscisse seines conjugirten Punktes, so wie der Abscissen des anderen Paares, so ist der erste das arithmetische Mittel aus den beiden anderen.

In Fig. 52 ist demnach:

$$\frac{1}{ac} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ad}\right); \quad \frac{1}{bd} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{ba}\right)$$

und ähnlich:

$$\frac{1}{db} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{da} + \frac{1}{dc}\right), \quad \frac{1}{ca} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{cb} - \frac{1}{cd}\right).$$

Ist die Mitte o der Strecke ac Anfangspunkt der Abscissen, also $x_2 = -x$, so verwandelt sich (3) in $x_3 = \dfrac{x^2}{x_1}$ oder $x_1 x_3 = x^2$. Da demnach x_1 und x_3 gleiches Zeichen haben müssen, so folgt hieraus, dass von der Mitte o zweier conjugirten Punkte (a und c) aus die beiden anderen (b und d) nach derselben Seite zu liegen müssen, und zwar so, dass:

$$(5) \quad oa^2 = oc^2 = ob \cdot od.$$

Die Gleichungen (4) und (5) können ebenfalls als Definitionen von harmonischen Punkten benutzt werden.

§. 75. G l e i c h u n g e n h a r m o n i s c h e r S t r a h l e n. Man nennt h a r m o n i s c h e s S t r a h l e n b ü s c h e l vier Gerade, die von einem Punkte O (Fig. 53) nach vier harmonischen Punkten A, B, C, D gezogen sind; die Geraden OA und OC, OB und OD, welche durch die conjugirten Punkte gehen, heissen conjugirte Strahlen. Liegt O unendlich entfernt, so sind die vier Geraden parallel.

A u f g a b e. Wenn die Gleichungen der drei Geraden OA, OB, OC gegeben sind, die Gleichung des zu OB conjugirten vierten harmonischen Strahles zu finden.

Auflösung. Es seien x_1, y_1 und x_3, y_3 bezüglich die Coordinaten von A und C, ferner:

$$(1)\quad \text{Gleichung von } OA:\ p = 0,\ \text{Gleichung von } OC:\ q = 0,$$
$$\text{Gleichung von } OB:\ \alpha p + \beta q = 0,$$

und die gesuchte Gleichung des vierten harmonischen Strahles OD:

$$(2)\quad \lambda p + \mu q = 0,$$

wo das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ zu bestimmen ist. Wir haben zufolge §. 69:

$$(3)\quad \pm\frac{AB}{CB} = \frac{\alpha p_1 + \beta q_1}{\alpha p_3 + \beta q_3} = \frac{\beta q_1}{\alpha p_3},$$

weil $p_1 = 0$ und $q_3 = 0$, und ebenso:

$$(4)\quad \pm\frac{AD}{CD} = \frac{\mu q_1}{\lambda p_3}.$$

Da von den Punkten B und D der eine innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke AC liegt, so sind in (3) und (4) verschiedene Vorzeichen zu nehmen; und ausserdem ist $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$, also muss $\pm\frac{\beta q_1}{\alpha p_3} = \mp\frac{\mu q_1}{\lambda p_3}$, d. h.:

$$(5)\quad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

sein. Substituirt man diesen Werth in (2) oder $p + \frac{\mu}{\lambda} q = 0$, so erhält man:

$$(6)\quad \alpha p - \beta q = 0,$$

welches demnach die Gleichung der zu OB conjugirten Geraden OD ist.

§. 76. Transversalen durch ein harmonisches Strahlenbüschel. Umgekehrt sind die Schnittpunkte A, B, C, D jeder Transversalen mit vier Geraden, deren Gleichungen der Reihe nach sind:

$$(1)\quad p = 0,\quad \alpha p + \beta q = 0,\quad q = 0,\quad \alpha p - \beta q = 0,$$

vier harmonische Punkte. Denn nennen wir wieder (x_1, y_1) die Coordinaten von A; x_3, y_3 die von C, so findet man wie vorhin $\pm\frac{AB}{CB} = \frac{\beta q_1}{\alpha p_3}$ und $\pm\frac{AD}{CD} = -\frac{\beta q_1}{\alpha p_3}$. Daraus schliesst man

zuerst, dass die Lage von B und D in Bezug auf AC eine verschiedene ist, und dass $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$, wir haben also den Satz:

I. Ein harmonisches Strahlenbüschel wird von jeder Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Ist die Transversale einer der vier Geraden (1) z. B. der Geraden $\alpha p - \beta q = 0$ parallel, so haben die drei anderen Schnittpunkte A, B, C (Fig. 54) eine specielle Lage. Nach §. 69, Form. 3* müssen alsdann die Werthe, welche $\alpha p - \beta q$ annimmt, wenn man x_1, y_1 und x_3, y_3 statt x, y einsetzt, gleich sein; dies giebt $\alpha p_3 = -\beta q_1$ oder $\frac{\beta q_1}{\alpha p_3} = -1$. Vergleicht man dies mit Gleichung (3) des vorhergehenden Paragraphen, so sieht man, dass B innerhalb AC liegen und $AB = BC$ sein muss, d. h. B ist die Mitte von AC; also:

II. Schneidet man ein harmonisches Strahlenbüschel durch eine Parallele zu einem der vier Strahlen, so wird der Durchschnitt mit dem conjugirten Strahle die Mitte der beiden anderen Durchschnitte sein*).

Weil die Mitte zweier conjugirten Punkte und der unendlich entfernte Punkt einer Geraden als das zweite Paar conjugirter harmonischer Punkte angesehen werden können (§. 74), so ist dieser Satz nur ein specieller Fall des vorhergehenden. Der umgekehrte Satz, dass nämlich drei Strahlen, die man von O nach drei Punkten in gerader Linie A, B und C gezogen hat, wo $AB = BC$, mit der Geraden durch O, die AC parallel ist, ein harmonisches Strahlen-

---

*) Man kann bei einem harmonischen Strahlenbüschel das eine Paar conjugirter Strahlen als eine Hyperbel mit unendlich kleinen Axen ansehen (§. 66) und jede Durchschnittsgerade demnach als eine Sehne: alsdann ergiebt sich aus Satz II., dass die Mittelpunkte aller einer gegebenen Richtung parallelen Sehnen, auch wenn die Hyperbel sich auf ein System gerader Linien reducirt, auf einer geraden Linie liegen, und zwar auf der zu gegebenen Richtung conjugirten harmonischen, d. h. in einem harmonischen Strahlenbüschel lässt sich das eine System conjugirter Strahlen als eine Hyperbel mit unendlich kleinen Axen, das andere als ein System conjugirter Durchmesser auffassen. H.

büschel bilden, lässt sich aus dem vorhergehenden sowohl direct als indirect leicht nachweisen.

Die Beweise in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen sind auf ein harmonisches Strahlenbüschel, das aus vier Parallelen besteht, nicht anwendbar; man überzeugt sich jedoch leicht durch elementar-geometrische Betrachtungen, dass für dieselben Satz I. gültig bleibt.

§. 77. Lehrsatz. Construction des vierten harmonischen Strahles. Es seien:

$$(1)\quad p=0,\qquad (2)\quad q=0,\qquad (3)\quad \alpha p+\beta q=0,$$

die Gleichungen dreier Geraden P, Q, Q' (Fig. 55), welche sich in a treffen. Denkt man sich durch einen Punkt b in Q' zwei andere Gerade, R und S, gezogen, deren Gleichungen:

$$(4)\quad r=0,\qquad (5)\quad s=0$$

sein mögen, so wird sich Q' auch durch eine Gleichung von der Form:

$$(6)\quad \alpha' r+\beta' s=0$$

darstellen lassen. Die Ausdrücke links in (3) und (6) können sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, da sie dieselbe Gerade darstellen; wir wollen annehmen, dass α' und β' mit demselben schon dividirt seien, dann sind die linken Seiten identisch gleich, d. h. $\alpha p+\beta q=\alpha' r+\beta' s$. Es folgt hieraus $\alpha p-\alpha' r=\beta' s-\beta q$; da aber $\alpha p-\alpha' r=0$ die Gleichung einer durch den Durchschnitt von P und R oder durch d, $\beta' s-\beta q=0$ die Gleichung einer durch den Durchschnitt von S und Q oder durch f gehenden Geraden ist, so stellt:

$$(7)\quad \alpha p-\alpha' r=0$$

die Gerade df dar. Ebenso hat man $\beta q-\alpha' r=\beta' s-\alpha p$, und folgert, wie vorhin, dass:

$$(8)\quad \beta q-\alpha' r=0$$

die Gleichung einer Geraden ist, welche sowohl durch den Durchschnitt e von Q und R, als durch den Durchschnitt c von S und P geht, d. h. dass (8) die Gleichung von ce ist. Zieht man (7) und (8) von einander ab, so muss die Gerade, deren Gleichung $(7)-(8)=0$ ist, durch den Durchschnitt o von df (7) und ce (8) gehen; das Resultat der Subtraction ist:

$$(9) \quad \alpha p - \beta q = 0,$$

eine Gleichung, welche auch durch a, den Durchschnitt von P und Q, befriedigt wird, d. h. (9) ist die Gleichung von oa. Wie wir aus §§. 75 und 76 wissen, ist (9) oder P' der vierte harmonische Strahl zu P, Q, Q', und letzterem conjugirt.

Da in (9) keine der Grössen enthalten ist, die sich auf den Punkt b und die Geraden R und S beziehen — nämlich α', β', so wie die Ausdrücke erster Ordnung r und s, — so folgt daraus, dass wenn man dieselbe Construction für andere Punkte b', b'' .. der Geraden Q' wiederholt, die Kreuzungspunkte o', o'' .. der Verbindungslinien $e'c'$ und $d'f'$, $e''c''$ und $d''f''$, .. immer in derselben Geraden (9) liegen. Wir haben also den Satz:

Nimmt man in Q', einer geraden Linie, welche mit P und Q durch denselben Punkt a geht, einen beliebigen Punkt b an und zieht durch ihn irgend zwei Gerade R, S, welche P und Q in vier Punkten schneiden, so lassen sich letztere durch zwei neue Gerade verbinden, ec, df, deren Durchschnitt o mit a verbunden, eine constante, d. h. nur von P, Q und Q' abhängige Gerade ist. Dieselbe bildet mit ihnen ein harmonisches Strahlenbüschel und ist der Geraden Q' conjugirt.

Dieser Satz giebt die einfachste Methode an, um zu drei harmonischen Strahlen den vierten zu finden. Wir wollen in dem folgenden Paragraphen eine andere Aussage desselben geben.

§. 78. Vollständiges Vierseit. Construction des vierten harmonischen Punktes. Vier unendliche Gerade P, Q, R, S (Fig. 56) bilden ein vollständiges Vierseit; ihre sechs Durchschnittspunkte bilden drei Paare gegenüberstehender Ecken a, b; e, c; f, d, welche durch drei Diagonalen verbunden werden; dieselben schneiden sich genugsam verlängert in drei Punkten o, o_1, o_2. Nach §. 77 sind ab, ad, ao, ae ein harmonisches Strahlenbüschel, worin ab und ao, so wie ad und ae conjugirt sind. Sie schneiden demnach jede Transversale in vier harmonischen Punkten, solche sind z. B. o_1, d, o, f, und o_2, c, o, e. Zieht man also fo_2, so sind fo_2, fc, fo, fe wiederum harmonische Strahlen, und o_2, b, o_1 a ein drittes System harmonischer Punkte. Wir haben also den Satz:

In jedem vollständigen Vierseit bilden die Endpunkte einer Diagonale und ihre Durchschnittspunkte mit den beiden anderen vier harmonische Punkte, und zwar sind die Endpunkte der Diagonale das eine Paar conjugirter Punkte.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man, wenn von vier harmonischen Punkten drei, z. B. a, o_1, b, gegeben sind, den vierten o_2 finden, der zu o_1 conjugirt ist. Man ziehe zu dem Ende durch o_1 eine beliebige Gerade $o_1 df$, nehme in derselben zwei Punkte an, d und f, verbinde diese mit a und b durch vier Gerade, welche sich noch in zwei Punkten e und c schneiden; zieht man endlich ec, so trifft dieselbe ab in dem gesuchten Punkte o_2.

Da durch a, o_1, b der Punkt o_2 vollständig bestimmt ist, so muss man stets denselben Punkt o_2 erhalten, welche Veränderungen man auch mit den willkührlichen Elementen der Construction vornehmen mag. Hieraus ergiebt sich ein Satz, welcher dem in §. 77 aufgestellten analog ist; er lautet:

Zieht man durch einen Punkt o_1, der mit zwei anderen a und b in gerader Linie liegt, eine beliebige Gerade, verbindet irgend zwei Punkte derselben d und f mit den beiden anderen a und b, so treffen sich diese vier Geraden in zwei neuen Punkten e und c, deren Verbindungslinie ec die Gerade ab in einem constanten, d. h. nur von a, b und o_1 abhängigen Punkte o_2 trifft; derselbe bildet mit ihnen vier harmonische Punkte und ist dem Punkte o_1 conjugirt.

Wir bemerken noch, dass in Fig. 56 e, d, b und der Durchschnitt von ao und R, so wie f, c, b und der Durchschnitt von ao und Q ebenfalls harmonische Punkte sind.

§. 79. Homologe Dreiecke. Durch dasselbe Verfahren, welches wir in §. 77 angewendet haben, können wir auch noch auf andere Sätze kommen.

Es sei wiederum Q' (Fig. 57) eine Gerade, in welcher drei Punkte a, b, c beliebig angenommen worden sind; durch jeden derselben habe man zwei Gerade P, Q; R, S; T, U gezogen, welche bezüglich durch die Gleichungen $p=0$, $q=0$; $r=0$, $s=0$; $t=0$, $u=0$ dargestellt sein mögen. Dann ist die Gleichung von Q' unter einer der

drei Formen darstellbar $\alpha p + \beta q = 0$, $\alpha' r + \beta' s = 0$, $\alpha'' t + \beta'' u = 0$. Wir wollen voraussetzen, was erlaubt ist, die linken Seiten dieser Gleichungen seien durch Division mit passenden constanten Factoren identisch gleich gemacht worden, so dass:

$$\alpha p + \beta q = \alpha' r + \beta' s = \alpha'' t + \beta'' u,$$

woraus:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha p - \alpha' r = \beta' s - \beta q, \\ \alpha p - \alpha'' t = \beta'' u - \beta q, \\ \alpha' r - \alpha'' t = \beta'' u - \beta' s. \end{cases}$$

Wie in §. 77 schliessen wir hieraus, dass $\alpha p - \alpha' r = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, welche sowohl durch den Durchschnitt ν von P und R, als auch durch ν', den Durchschnitt von Q und S, geht. Ferner geht die Gerade $\alpha p - \alpha'' t = 0$ durch μ, den Durchschnitt von P und T, und durch μ', den Durchschnitt von U und Q, und schliesslich $\alpha' r - \alpha'' t = 0$ durch die beiden Punkte λ und λ', d. h.:

$$(2) \quad \alpha p - \alpha' r = 0, \quad (3) \quad \alpha p - \alpha'' t = 0, \quad (4) \quad \alpha' r - \alpha'' t = 0$$

sind die Gleichungen der Geraden $\nu\nu'$, $\mu\mu'$, $\lambda\lambda'$; und da offenbar (4) = (3) — (2), so schneiden sich die drei durch sie dargestellten Linien in einem Punkte; d. h.:

Haben zwei Dreiecke $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ eine solche Lage, dass die Seitenpaare $\mu\nu$, $\mu'\nu'$; $\nu\lambda$, $\nu'\lambda'$; $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$ sich in drei in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c treffen, so gehen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch einen Punkt.

§. 80. Umkehrung des letzten Satzes. Die Umkehrung dieses Satzes lautet:

Haben zwei Dreiecke $\lambda\mu\nu$ und $\lambda'\mu'\nu'$ eine solche Lage, dass die Verbindungslinien der Ecken $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ sich in einem Punkte treffen, so liegen die Schnittpunkte der drei Paare entsprechender Seiten in einer Geraden.

Wir wollen, um noch eine Anwendung des in §. 72 erklärten Princips zu geben, den directen Beweis dieses Satzes als Beispiel hinzufügen.

Es seien (Fig. 57):

(1) Gleichung von $o\lambda$: $p=0$,
(2) - - $o\mu$: $q=0$,
(3) - - $o\nu$: $p+\alpha q=0$,
(4) - - $\lambda\mu$: $r=0$,
(5) - - $\lambda\nu$: $p+\beta r=0$.

Die Gleichung von $\mu\nu$ muss sein $p+\alpha q+\gamma(p+\beta r)=0$, da $\mu\nu$ durch den Durchschnitt von $o\nu$ und $\lambda\nu$ geht. Diese Gleichung muss jedoch auch befriedigt sein, wenn man gleichzeitig $q=0$ und $r=0$ setzt, weil $\mu\nu$ durch μ, den Durchschnitt von $o\mu$ und $\lambda\mu$, geht. Durch diese Annahme verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in $p(1+\gamma)=0$, und da für μ der Ausdruck p nicht gleich Null wird, muss $\gamma=-1$ sein, also ist:

(6) Gleichung von $\mu\nu$: $\alpha q-\beta r=0$.

Für die Seiten des Dreiecks $\lambda'\mu'\nu'$ findet man ähnlich:

(7) Gleichung von $\lambda'\mu'$: $s=0$,
(8) - - $\lambda'\nu'$: $p+\delta s=0$,
(9) - - $\mu'\nu'$: $\alpha q-\delta s=0$.

Bildet man die Gleichungen $(5)-(8)=0$, $(9)-(6)=0$, so erhält man beide Male:

$$(10)\quad \beta r-\delta s=0.$$

Dies ist demnach die Gleichung einer Geraden, welche durch den Durchschnitt von $\lambda\nu$ und $\lambda'\nu'$, so wie durch den von $\mu\nu$ und $\mu'\nu'$ geht. Da die Gerade (10) aber offenbar durch den Durchschnitt von $r=0$, $s=0$ oder $\lambda\mu$ und $\lambda'\mu'$ geht, so liegen diese drei Durchschnittspunkte in einer Geraden.

§. 81. Die Gleichung $\alpha p+\beta q+\gamma r=0$. Es seien $p=0$, $q=0$, $r=0$ die Gleichungen der Seiten BC, CA, AB eines Dreieckes. Eine beliebige Gerade G muss wenigstens zwei dieser Seiten treffen; sie möge BC in A' schneiden (Fig. 58). Ist die Gleichung von AA': $u=0$, so wird die von G: $u+\alpha p=0$ sein; die Gleichung $u=0$ hat aber, weil sie durch den Punkt A erfüllt sein muss, die Form $\beta q+\gamma r=0$, also ist die Gleichung von G unter der Form $\alpha p+\beta q+\gamma r=0$ darstellbar.

Sind demnach $p=0$, $q=0$, $r=0$ die Gleichungen dreier Geraden, welche sich in drei verschiedenen Punkten schneiden, oder ein Dreieck bilden, so ist die Gleichung jeder beliebigen Geraden unter der Form:

$$(1) \quad \alpha p + \beta q + \gamma r = 0$$

darstellbar.

Dieser Satz, auf dessen Begründung wir später noch einmal kommen werden, ist als eine Erweiterung des Satzes in §. 72 anzusehen.

Es seien A', B', C' die Durchschnitte von (1) mit den Seiten des Dreiecks ABC, so stellt $\beta q + \gamma r = 0$ oder $(1) - \alpha p = 0$ eine durch den Durchschnitt A von $q = 0$ und $r = 0$, und den Durchschnitt A' von (1) und $p = 0$ gehende Gerade, oder, wie wir schon vorher gesehen haben, die Gerade AA' dar. Ebenso sind $\alpha p + \gamma r = 0$ und $\alpha p + \beta q = 0$ bezüglich die Gleichungen von BB' und CC'. In jeder Ecke des Dreiecks kommen jetzt drei Gerade zusammen, z. B. in A die Linien AB, AC, AA'; bestimmt man zu diesen den vierten harmonischen Strahl, also in unserem Beispiele den zu AA' conjugirten, Aa, so wird dessen Gleichung:

$$(2) \quad \beta q - \gamma r = 0,$$

und ähnlich für Bb und Cc:

$$(3) \quad \alpha p - \gamma r = 0, \qquad (4) \quad \alpha p - \beta q = 0.$$

Weil aber $(4) = (3) - (2)$, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte o.

Erwägt man noch, dass der Durchschnitt a und die Punkte B, C, A' vier harmonische Punkte sind und a dem A' conjugirt ist, dass ferner auf den beiden anderen Dreiecksseiten das Analoge stattfindet, so hat man folgenden Satz:

Nimmt man auf den drei Seiten eines Dreiecks ABC oder ihren Verlängerungen drei Punkte A', B', C' in gerader Linie, bestimmt zu je zwei Ecken des Dreiecks (B, C) und dem auf derselben Geraden liegenden Punkte (A') den vierten harmonischen (a) und verbindet denselben mit der Gegenecke (A), so schneiden sich die so erhaltenen drei Geraden in einem Punkte o.

Umgekehrt:

Zieht man durch einen Punkt o und die Ecken eines Dreiecks drei Transversalen, welche die Gegenseiten in drei Punkten treffen, und bestimmt zu ihnen und den Ecken des Dreiecks, die mit ihnen bezüglich auf einer Geraden liegen, die vierten harmonischen Punkte, so liegen dieselben in einer Geraden.

In der That, sind x_1, y_1 die Coordinaten von o, so ist:

$$(5)\quad \begin{cases} \text{Gleichung von } Ao: & \dfrac{q}{q_1} - \dfrac{r}{r_1} = 0, \\ \quad - \quad - \quad Bo: & \dfrac{p}{p_1} - \dfrac{r}{r_1} = 0, \\ \quad - \quad - \quad Co: & \dfrac{p}{p_1} - \dfrac{q}{q_1} = 0, \end{cases}$$

wo wir die Bedeutung von p_1, q_1, r_1 ebenso wie in §. 69 annehmen; also ist:

$$A' \text{ der Durchschnitt von } p = 0 \text{ und } \frac{q}{q_1} + \frac{r}{r_1} = 0,$$

$$B' \quad - \quad - \quad - \quad q = 0 \text{ und } \frac{p}{p_1} + \frac{r}{r_1} = 0,$$

$$C' \quad - \quad - \quad - \quad r = 0 \text{ und } \frac{p}{p_1} + \frac{q}{q_1} = 0.$$

Alle drei Punkte genügen demnach der Gleichung:

$$(6)\quad \frac{p}{p_1} + \frac{q}{q_1} + \frac{r}{r_1} = 0,$$

d. h. sie liegen in einer Geraden.

Man nennt zuweilen die Gerade (6) die **Polare** des Punktes (x_1, y_1) und diesen Punkt den **Pol** jener Geraden in Bezug auf das Dreieck ABC.

§. 82. **Die Diagonalen eines vollständigen Vierseits.** Um noch eine Anwendung des letzten Princips zu geben, sei:

$$(7)\quad \alpha' p + \beta' q + \gamma' r = 0,$$

eine zweite Gerade, welche die Seiten des Dreiecks ABC in A'', B'', C'' treffe. (In Fig. 58, auf welche wir uns noch beziehen, haben wir diese Gerade jedoch nicht gezeichnet.) Wir wollen die vier-

ten harmonischen Punkte zu A'', A', a u. s. w. bestimmen, und annehmen, dass A', a conjugirt seien. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, und setzen die Numerirung der Gleichungen daher auch fort, so ist die Gleichung von:

$$\left.\begin{aligned} Aa:&\ (2)\,\beta q - \gamma r = 0 \\ AA':&\ (8)\,\beta q + \gamma r = 0 \end{aligned}\right\}\text{(siehe §. 81),}$$
$$AA'':\ (9)\,\beta' q + \gamma' r = 0.$$

Setzt man $\beta q - \gamma r = t$, $\beta q + \gamma r = u$, so wird:

$$q = \frac{t+u}{2\beta},\quad r = \frac{u-t}{2\gamma},$$

und die vorangehenden Gleichungen verwandeln sich in:

$$t = 0,\quad u = 0,\quad t\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\gamma'}{\gamma}\right) + u\left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) = 0.$$

Der durch A gehende, zu AA'' conjugirte Strahl ist demnach:

$$t\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\gamma'}{\gamma}\right) - u\left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) = 0,$$

oder:

$$(\beta q - \gamma r)\left(\frac{\beta'}{\beta} - \frac{\gamma'}{\gamma}\right) - (\beta q + \gamma r)\left(\frac{\beta'}{\beta} + \frac{\gamma'}{\gamma}\right) = 0.$$

Löst man die Klammern auf, so erhält man $\beta^2\gamma' q + \gamma^2\beta' r = 0$, oder:

$$(10)\quad \frac{\beta^2 q}{\beta'} + \frac{\gamma^2 r}{\gamma'} = 0.$$

Nennen wir daher den vierten harmonischen Punkt zu a, A', A'', der zu A'' conjugirt ist, a', so ist:

$$a' \text{ der Durchschnitt von } p = 0 \text{ und } \frac{\beta^2 q}{\beta'} + \frac{\gamma^2 r}{\gamma'} = 0,$$

und in ähnlicher Weise ist:

$$b' \text{ der Durchschnitt von } q = 0 \text{ und } \frac{\alpha^2 p}{\alpha'} + \frac{\gamma^2 r}{\gamma'} = 0,$$

$$c' \quad - \quad - \quad - \quad r = 0 \text{ und } \frac{\alpha^2 p}{\alpha'} + \frac{\beta^2 q}{\beta'} = 0.$$

Die drei Punkte a', b', c' liegen demnach in der Geraden:

$$(11)\quad \frac{\alpha^2 p}{\alpha'} + \frac{\beta^2 q}{\beta'} + \frac{\gamma^2 r}{\gamma'} = 0.$$

Die Aussage dieses Satzes lässt sich bei einer anderen Auffassung der Figur sehr vereinfachen. Wir haben dieselbe mit Auslassung von Aa, Bb, Cc in Fig. 59 wiederholt. Weil C', A, c, B und B', A, b, C harmonische Punkte sind, so werden die von A' aus nach ihnen gezogenen Strahlen harmonische sein. Drei Paare dieser Strahlen fallen aber auf einander (z. B. $A'B'$ und $A'C'$), also werden auch $A'c$ und $A'b$ zusammenfallen; d. h. A', c, b liegen in gerader Linie. Ebenso ist es mit B', c, a und C', b, a. Zieht man diese Geraden, so erhält man ein vollständiges Vierseit, in welchem $A'a$, $B'b$, $C'c$ die drei Diagonalen sind. Die obigen Rechnungen beweisen demnach den Satz:

Schneidet man die drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits durch eine Gerade und bestimmt zu jedem Schnittpunkte und den Endpunkten der Diagonale — diese letzteren als conjugirte betrachtet — den vierten harmonischen Punkt, so liegen die drei so erhaltenen Punkte in einer Geraden.

Anm. Es sind die Gleichungen von:

$$A'A:\quad \beta q + \gamma r = 0,$$
$$A'B:\quad p = 0,$$
$$A'B':\quad \alpha p + \beta q + \gamma r = 0,$$

also die Gleichung des dem Strahl $A'B'$ conjugirten Strahles $A'cb$:

$$-\alpha p + \beta q + \gamma r = 0,$$

ebenso lassen sich die Gleichungen von $B'ca$, $C'ab$ bestimmen. Bezeichnet man demnach die Gleichungen der Diagonalen eines vollständigen Vierseits durch:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

so sind die Gleichungen der vier Seiten:

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha p + \beta q + \gamma r = 0, \\ -\alpha p + \beta q + \gamma r = 0, \\ \alpha p - \beta q + \gamma r = 0, \\ \alpha p + \beta q - \gamma r = 0. \end{cases}$$

§. 83. Unendlich entfernte Punkte und Gerade. Es sei:

$$(1)\quad p = lx + my + n = 0$$

die Gleichung einer Geraden; schreibt man dieselbe:

$$l + m\frac{y}{x} + \frac{n}{x} = 0,$$

so wird sie befriedigt werden, wenn:

$$(2)\quad \frac{n}{x} = 0, \qquad (2^*)\quad \frac{y}{x} = -\frac{l}{m}.$$

Die Gleichung (2) ist bei einem beliebigen n nur möglich, wenn x unendlich ist; die Gleichung (2*) zeigt, dass in diesem Falle $y = -\frac{l}{m}x$ es auch wird, das Verhältniss dieser Grössen $\frac{y}{x}$ aber endlich bleibt. Ist $Lx + My + N = 0$ die Gleichung einer (1) parallelen Geraden, so wird (§. 19, Form. 4) $\frac{l}{m} = \frac{L}{M}$; beide Gerade haben demnach den unendlich entfernten Punkt (dessen unendlich grosse Coordinaten y, x ein endliches Verhältniss $= -\frac{l}{m} = -\frac{L}{M}$ haben) mit einander gemeinschaftlich.

Es seien:

$$(3)\quad q = l'x + m'y + n' = 0, \qquad (4)\quad r = l''x + m''y + n'' = 0$$

die Gleichungen zweier Geraden, welche mit (1) ein Dreieck bilden. Dann kann man in einem gewissen Sinne behaupten, dass die Gleichung:

$$(5)\quad (l'm'' - l''m')p + (l''m - lm'')q + (lm' - l'm)r = 0,$$

durch die unendlich entfernten Punkte sämmtlicher Geraden befriedigt werde. Denn schreibt man dieselbe:

$$(l'm'' - l''m')\left(l + m\frac{y}{x} + \frac{n}{x}\right) + (l''m - lm'')\left(l' + m'\frac{y}{x} + \frac{n'}{x}\right)$$
$$+ (lm' - l'm)\left(l'' + m''\frac{y}{x} + \frac{n''}{x}\right) = 0,$$

so ist erstens, was auch $\frac{y}{x}$ sein mag:

$$(l'm'' - l''m')\left(l + m\frac{y}{x}\right) + (l''m - lm'')\left(l' + m'\frac{y}{x}\right) + (lm' - l'm)\left(l'' + m''\frac{y}{x}\right) = 0,$$

wie man sich durch Auflösung der Klammern leicht überzeugt; und

$$(l'm'' - l''m')\frac{n}{x} + (l''m - lm'')\frac{n'}{x} + (lm' - l'm)\frac{n''}{x}$$

wird $= 0$ für $x = \infty$. Man kann (5) deshalb die Gleichung der unendlich entfernten Geraden der Ebene nennen. Benutzt man dieselbe statt der Gleichung (7) im vorigen Paragraphen, so verwandelt sich die Gleichung (11) desselben in:

$$(6) \quad \frac{\alpha^2}{l'm'' - l''m'}p + \frac{\beta^2}{l''m - lm''}q + \frac{\gamma^2}{lm' - l'm}r = 0.$$

In dieser Geraden (6) liegen demnach die Punkte, welche jedesmal mit den Endpunkten der Diagonalen $A'a$, $B'b$, $C'c$ (Fig. 59) und den unendlich entfernten Punkten derselben ein System von vier harmonischen Punkten bilden. Da aber zu A', a und dem unendlich entfernten Punkte von $A'a$ die Mitte von $A'a$ als vierter harmonischer Punkt zugehört, so lautet dieser specielle Fall des Lehrsatzes im vorhergehenden Paragraphen:

Die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.

§. 84. Anderer Beweis des letzten Satzes. Da die Gränzbetrachtungen, mit Hilfe deren man den Entwickelungen des vorigen Paragraphen die Präcision und Strenge geben kann, welche bei der gewählten Darstellung ihnen fehlen, uns zu weit führen würden, so wollen wir den directen Beweis des zuletzt gegebenen Satzes als letzte Anwendung der in diesem Abschnitte auseinandergesetzten Principien mittheilen.

Wir beziehen uns dabei auf die Rechnungen in §. 82 und auf Fig. 59. Es seien:

(1) Gleichung von BC: $p = lx + my + n = 0$,

(2) - - CA: $q = l'x + m'y + n' = 0$,

(3) - - AB: $r = l''x + m''y + n'' = 0$.

$$\begin{array}{llrl}
(4) & \text{Gleichung von } A'C': & & \alpha p + \beta q + \gamma r = 0, \\
(5) & \quad - \quad - \quad A'b: & & -\alpha p + \beta q + \gamma r = 0, \\
(6) & \quad - \quad - \quad B'a: & & \alpha p - \beta q + \gamma r = 0, \\
(7) & \quad - \quad - \quad C'a: & & \alpha p + \beta q - \gamma r = 0. \\
(8) & \quad - \quad - \quad A'A: & & \beta q + \gamma r = 0, \\
(9) & \quad - \quad - \quad aA: & & \beta q - \gamma r = 0.
\end{array}$$

Die Gleichung einer Parallelen mit BC durch A ist:

$$\lambda(l'x + m'y + n') + \mu(l''x + m''y + n'') = \lambda q + \mu r = 0,$$

wo:

$$\frac{\lambda l' + \mu l''}{\lambda m' + \mu m''} = \frac{l}{m} \quad (\S.\ 19,\ 4),$$

oder:

$$\lambda(l'm - lm') + \mu(l''m - lm'') = 0,$$

woraus:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{l''m - lm''}{lm' - l'm}.$$

Also die Gleichung der Parallelen:

$$(10) \quad (l''m - lm'')q + (lm' - l'm)r = 0.$$

Sucht man zu (8), (9) und (10) den vierten harmonischen Strahl, so schneidet er $p = 0$ in der Mitte von Aa.

Vergleicht man die zu Anfange des §. 82 angestellten Rechnungen mit der gegenwärtigen Entwickelung, so sieht man, die Mitte von $A'a$ ist der Durchschnitt von:

$$p = 0 \quad \text{und:} \quad \frac{\beta^2}{l''m - lm''} q + \frac{\gamma^2}{lm' - l'm} r = 0,$$

und ähnlich die Mitte von $B'b$ ist der Durchschnitt von:

$$q = 0 \quad \text{und:} \quad \frac{\alpha^2}{l'm'' - l''m'} p + \frac{\gamma^2}{lm' - l'm} r = 0,$$

und die Mitte von $C'c$ ist der Durchschnitt von:

$$r = 0 \quad \text{und:} \quad \frac{\alpha^2}{l'm'' - l''m'} p + \frac{\beta^2}{l''m - lm''} q = 0.$$

Die drei Mitten liegen demnach in der Geraden:

$$(11) \quad \frac{\alpha^2}{l'm''-l''m'}p+\frac{\beta^2}{l''m-lm''}q+\frac{\gamma^2}{lm'-l'm}r=0,$$

welche Gleichung mit (6) im vorigen Paragraphen übereinstimmt.

Zehntes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Kegelschnitte. Combination eines Kegelschnittes und geradliniger Transversalen.

§. 85. Ideale Secante. Reelle und imaginäre Schnittpunkte. Wenn die Gerade:

$$(1) \quad \alpha x+\beta y+\gamma=0$$

die Curve zweiter Ordnung:

$$U=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$

welche wir in der Folge der Kürze halber stets mit U bezeichnen werden, nicht trifft, so haben die quadratischen Gleichungen, welche die Coordinaten der Durchschnittspunkte geben, imaginäre Wurzeln; d. h. diese Coordinaten stellen sich unter der Form dar:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1=l+l_1\sqrt{-1}, & y_1=m+m_1\sqrt{-1}, \\ x_2=l-l_1\sqrt{-1}, & y_2=m-m_1\sqrt{-1}, \end{cases}$$

wo l, l_1, m, m_1 reelle Grössen bedeuten, welche aus den Coefficienten in U und (1) zusammengesetzt sind. Man nennt in diesem Falle die Gerade eine ideale Secante, die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) imaginäre Durchschnittspunkte. Die Gleichung erster Ordnung, welche sich (§. 18) als die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 ergeben hat:

$$y(x_1-x_2)-x(y_1-y_2)+y_1x_2-y_2x_1=0$$

wird durch Einsetzen der Werthe von x_1, y_1 und x_2, y_2 aus den Gleichungen (2):

$$yl_1-xm_1+lm_1-l_1m=0,$$

also reell, und kann von $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ sich natürlich nur durch

einen constanten Factor unterscheiden. Aber auch die Verbindungen x_1+x_2, x_1x_2, y_1+y_2, y_1y_2 werden reell, nämlich:

$$(3)\quad \begin{cases} x_1+x_2=2l, & x_1x_2=l^2+l_1^2, \\ y_1+y_2=2m, & y_1y_2=m^2+m_1^2, \end{cases}$$

Erinnert man sich der Bedeutung von $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$, so muss man sagen, die Mitte der Durchschnittspunkte einer idealen Secante ist reell. Das Paradoxe, von einer wirklich vorhandenen Mitte zweier nicht existirenden Punkte zu sprechen, verschwindet, wenn man sagt: auf jeder Geraden (1) lässt sich ein reeller Punkt P oder $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ bestimmen, dessen Coordinaten von den Constanten in (1) und U abhängen, und welcher für den Fall, dass (1) die Curve in zwei reellen Punkten schneidet, die Mitte derselben ist. Ist z. B. U ein Kreis, so ergiebt sich für P der Fusspunkt des vom Centrum auf (1) gefällten Lothes, P ist also stets ein reeller Punkt; er wird die Mitte der Sehne, wenn (1) den Kreis schneidet. Für einen beliebigen Kegelschnitt wird P der Durchschnitt von (1) und des der Richtung dieser Geraden conjugirten Durchmessers (§. 61).

Ist (x, y) ein reeller Punkt Q in der Geraden (1), und sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Durchschnitte derselben mit U, so kann man den vierten harmonischen Punkt R oder (x_3, y_3), der zu Q conjugirt sein soll, durch die Bemerkung finden, dass die Projectionen dieser Punkte auf beide Axen ebenfalls harmonische Punkte sind; man hat also (§. 74, Form. 2):

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}+\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=0, \quad \frac{y-y_1}{y-y_2}+\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}=0,$$

woraus:

$$x_3=\frac{2x_1x_2-x(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2x}, \quad y_3=\frac{2y_1y_2-y(y_1+y_2)}{y_1+y_2-2y}.$$

Da aber x_1+x_2, x_1x_2, y_1+y_2, y_1y_2 reelle Grössen sind, selbst wenn (1) eine ideale Secante ist, so ist auch (x_3, y_3) ein stets reeller Punkt; man kann also den vierten harmonischen Punkt R zu drei anderen Q, A, B finden, wenn die beiden conjugirten A, B die imaginären Durchschnitte einer idealen Secante mit U sind; R bleibt reell, wenn sein conjugirter Punkt Q es ist. Anders

ausgedrückt: nimmt man auf einer Geraden (1) einen Punkt Q an, so lässt sich ein zweiter reeller Punkt R derselben bestimmen, dessen Coordinaten durch die von Q und die Coefficienten in (1) und (C) ausgedrückt sind, so dass, wenn (1) und U zwei Durchschnittspunkte haben, diese letzteren mit Q und R vier harmonische Punkte bilden.

Anm. Wie in den beiden vorhergehenden Fällen, so wird jede Grösse, in welcher die Coordinaten der Durchschnitte von (1) und U rational und symmetrisch eingehen, reell bleiben, selbst wenn (1) eine ideale Secante ist. Denn da $y_1 = -\frac{\alpha}{\beta}x_1 - \frac{\gamma}{\beta}$ und $y_2 = -\frac{\alpha}{\beta}x_2 - \frac{\gamma}{\beta}$, so muss sich nach bekannten algebraischen Sätzen jede rationale und symmetrische Function der Coordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) durch $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ rational ausdrücken lassen.

§. 86. **Winkel mit paarweise parallelen Schenkeln von einem Kegelschnitt durchschnitten.** Um die Durchschnitte der Curve U und der x-Axe zu finden, setzen wir $y = 0$, wodurch U in $ax^2 + 2dx + f = 0$ übergeht. Sind x_1, x_2 die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, so ist $x_1 x_2 = \frac{f}{a}$. Ebenso findet man, wenn y_1 und y_2 die Ordinaten der Punkte bedeuten, in welchen die Curve die y-Axe trifft, diese Grössen als Wurzeln der quadratischen Gleichung $cy^2 + 2ey + f = 0$, also $y_1 y_2 = \frac{f}{c}$; hieraus ergiebt sich:

$$(1) \quad \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = \frac{c}{a}.$$

Denken wir uns die Curve U auf ein neues paralleles Coordinatensystem (x', y') bezogen, so ändert sich zwar die Gleichung der Curve, ihre ersten Glieder werden aber wiederum $ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2$ (§. 63). Bezeichnet man also wie oben durch x_1^1, x_2^1, y_1^1, y_2^1 die Abscissen und Ordinaten der Punkte, in welchen die Curve die neuen Axen trifft, so hat man $\frac{x_1^1 x_2^1}{y_1^1 y_2^1} = \frac{c}{a}$, woraus:

$$(2)\quad \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} = \frac{x_1^1 x_2^1}{y_1^1 y_2^1}.$$

Diese Formel enthält den Satz:

Schneidet der eine Schenkel eines Winkels O (Fig. 60) einen Kegelschnitt in A und B, der andere Schenkel in C und D, so ist das Verhältniss $\frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD}$ für alle Winkel mit parallelen Schenkeln constant, d. h. es ist:

$$(3)\quad \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{O'A' \cdot O'B'}{O'C' \cdot O'D'}.$$

Die Gleichung (2) enthält gleichzeitig eine Bedingung über die Lage der acht Durchschnitte A, B, .. C', D' in Bezug auf die Scheitelpunkte O, O'. Die beiden Seiten der Gleichung müssen nämlich auch dem Zeichen nach übereinstimmen, und ein Product wie $x_1 x_2$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Anfangspunkt O ausserhalb oder innerhalb der Durchschnittspunkte liegt; wir übergehen jedoch die Aufstellung dieser Bedingung und wenden uns zu einigen Anwendungen des Satzes.

Ist O' Mittelpunkt der Curve, also $O'A' = O'B' = u$, $O'C' = O'D' = v$, so hat man:

$$(4)\quad \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{u^2}{v^2},$$

d. h. die Producte der Entfernungen des Scheitelpunktes eines Winkels von den Durchschnittspunkten der Schenkel mit der Curve verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, die den Schenkeln parallel sind.

Fallen A und B, so wie C und D zusammen, d. h. sind OAB und OCD Tangenten, so hat man $\frac{OA^2}{OC^2} = \frac{u^2}{v^2}$, oder $\frac{OA}{OC} = \frac{u}{v}$, also die von einem Punkte O an eine Ellipse gelegten Tangenten verhalten sich wie die parallelen Halbmesser.

Ist in (4) $u = v$, d. h. (§. 34, Anm.) sind die Halbmesser u und v, also auch die parallelen Schenkel OA, OC gegen die Axen gleich geneigt, so wird $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (Fig. 61); dies ist aber die Bedingung, damit A, B, C, D in einem Kreise liegen, also: sind zwei sich schneidende Sehnen einer Ellipse gegen die Axen gleich geneigt, so liegen ihre Endpunkte in einem Kreise. Wie wir später sehen werden (§. 100), schneiden sich ein Kreis

und eine Ellipse im Allgemeinen in vier Punkten; man hat daher auch den umgekehrten Satz, dass die Sehnen, welche solche vier Punkte verbinden, gegen die Axen gleich geneigt sind.

§. 87. Besondere Fälle. Man kann sich die Frage vorlegen, welche Form die Gleichung:

$$(1)\quad \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{u^2}{v^2}$$

annimmt, wenn O auf dem Kegelschnitt selbst liegt, wodurch $OA = 0$, $OC = 0$ wird. Zieht man (Fig. 60) die Linie AC, so ist:

$$(2)\quad \frac{OA}{OC} = \frac{\sin FCD}{\sin GAB}, \quad \text{also:} \quad (2^*)\quad \frac{OB}{OD}\frac{\sin FCD}{\sin GAB} = \frac{u^2}{v^2}.$$

Nähert sich O der Curve, so wird AC Tangente, und man hat also dann in Bezug auf Fig. 62 die Gleichung:

$$(3)\quad \frac{OB}{OD}\frac{\sin FOD}{\sin GOB} = \frac{u^2}{v^2},$$

wo u und v den Sehnen OB und OD parallel sind. Schreibt man man statt dieser Gleichung:

$$(4)\quad \frac{u^2 \sin GOB}{OB} = \frac{v^2 \sin FOD}{OD},$$

so sind die Grössen, welche sich auf die Sehnen OB und OD beziehen, von einander getrennt. Um den in (4) enthaltenen Satz bequem aussprechen zu können, wollen wir OD der grossen Axe $2a$ einer Ellipse, auf deren Untersuchung wir uns gegenwärtig beschränken, parallel annehmen, also $v = a$. Ist die Gleichung der Curve wie gewöhnlich $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, und sind x_1, y_1 die Coordinaten von O, so hat man nach unserer Annahme $OD = 2x_1$, und die Tangente in O schneidet von der x-Axe das Stück $O'G = \frac{a^2}{x_1}$ ab. Nun ist, weil OD und $O'G$ parallel sind, W. $FOD = FGO'$, also die rechte Seite in (1):

$$= \frac{a^2 \sin FGO'}{2x_1} = \frac{GO'}{2} \sin FGO' = \frac{p}{2},$$

wo p das vom Mittelpunkte O' auf die Tangente in O gefällte Loth bedeutet. Dadurch verwandelt sich (4) in:

$$\frac{u^2 \sin GOB}{OB} = \frac{p}{2}, \quad \text{oder in:} \quad \frac{u^2}{p} = \frac{\frac{1}{2}OB}{\sin GOB}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber der Radius *Oo* eines Kreises, der die Ellipse in *O* berührt, also *GF* zur Tangente hat, und durch *B* geht, wie man leicht aus der Figur ersehen wird, wo die Construction des Mittelpunktes *o* ausgeführt ist. Hieraus folgt:

Der Radius eines Kreises, welcher die Ellipse in *O* berührt und in *B* schneidet, ist gleich $\frac{u^2}{p}$, wo *u* den der Sehne *OB* parallelen Halbmesser und *p* das vom Mittelpunkte der Ellipse auf die Tangente in *O* gefällte Loth bedeutet.

§. 88. Fortsetzung. So wie in der Relation (§. 86, Form. 3) Segmente verschwinden können, so können dieselben auch unendlich gross werden. Es seien *AB*, *A'B'* zwei parallele Sehnen eines Kegelschnittes, die von einer dritten *CD* resp. in *O* und *O'* geschnitten werden; dann ist:

$$\frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \frac{O'A' \cdot O'B'}{O'C \cdot O'D}, \quad \text{oder:} \quad \frac{OA \cdot OB}{OC} : \frac{O'A' \cdot O'B'}{O'C} = OD : O'D.$$

Ist der Kegelschnitt eine Parabel oder Hyperbel, so kann man die Sehne *CD* so um *C* drehen, dass *D* sich immer mehr von *C* entfernt. Für den Fall der Parabel wird endlich *CD* der Axe, und für den Fall der Hyperbel (Fig. 63) einer der beiden Asymptoten parallel werden, und weil $OD = O'D \pm OO'$, je nachdem *O* ausserhalb oder innerhalb *O'D* liegt, so geht $\frac{OD}{O'D} = 1 \pm \frac{OO'}{OD}$, wenn *OD* immer grösser wird, endlich in Eins über; d. h.:

Zieht man durch einen Punkt *C* einer Parabel (oder Hyperbel) eine Parallele zur Axe der Parabel (oder zu einer Asymptote der Hyperbel) und schneidet dieselbe zwei parallele Sehnen *AB*, *A'B'* in *O* und *O'*, so ist:

$$\frac{OA \cdot OB}{OC} = \frac{O'A' \cdot O'B'}{O'C}, \quad \text{oder:} \quad \frac{OA \cdot OB}{O'A' \cdot O'B'} = \frac{OC}{O'C}.$$

Wir übergehen alle Folgerungen aus dieser Gleichung bis auf eine. Denkt man sich im Falle der Hyperbel die Transversale *COO'*

durch parallele Verschiebung der Asymptote immer näher rückend, so entfernt sich C immer weiter von O und O', $\frac{OC}{O'C}$ wird ebenfalls endlich $= 1$, und man hat den Satz:

Schneiden zwei parallele Hyperbelsehnen, AB, $A'B'$, eine Asymptote in o und o', so ist $Ao \cdot Bo = A'o' \cdot B'o'$.

§. 89. Die Gleichung $u_1 - 2\lambda v + \lambda^2 u_2 = 0$; System zweier Tangenten. Wir kommen auf einfache Weise zu neuen Sätzen über die Durchschnitte eines Kegelschnittes und einer Transversalen, indem wir die Gleichung derselben unter einer anderen Form darstellen (§. 69). Es seien (x_1, y_1), (x_2, y_2) zwei Punkte A und C: dann sind die Coordinaten eines jeden Punktes B der Geraden AC durch die Gleichungen gegeben:

$$(1) \quad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad \lambda = \frac{AB}{CB}.$$

Setzen wir diese Werthe in:

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

ein, so erhalten wir, nachdem wir die Gleichung mit $(1 - \lambda)^2$ multiplicirt haben:

$$a(x_1 - \lambda x_2)^2 + 2b(x_1 - \lambda x_2)(y_1 - \lambda y_2) + c(y_1 - \lambda y_2)^2$$
$$+ 2d(x_1 - \lambda x_2)(1 - \lambda) + 2e(y_1 - \lambda y_2)(1 - \lambda) + f(1 - \lambda)^2 = 0,$$

oder, wenn wir nach λ ordnen:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f$$
$$- 2\lambda\{ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 + d(x_1 + x_2) + e(y_1 + y_2) + f\}$$
$$+ \lambda^2(ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + f) = 0.$$

Schreiben wir der Kürze wegen:

$$u_1 = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f,$$
$$u_2 = ax_2^2 + 2bx_2y_2 + cy_2^2 + 2dx_2 + 2ey_2 + f,$$
$$v = ax_1x_2 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cy_1y_2 + d(x_1 + x_2) + e(y_1 + y_2) + f,$$
$$= x_1(ax_2 + by_2 + d) + y_1(bx_2 + cy_2 + e) + dx_2 + ey_2 + f,$$
$$= x_2(ax_1 + by_1 + d) + y_2(bx_1 + cy_1 + e) + dx_1 + ey_1 + f,$$

so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in:

$$(2) \quad u_1 - 2\lambda v + \lambda^2 u_2 = 0.$$

Man erhält hieraus zwei Werthe für λ, welche in (1) eingesetzt die Coordinaten der Durchschnitte der Curve U und der Transversalen AC ergeben. Liegt der Punkt A auf der Curve selbst, so wird $u_1 = 0$, und (2) verwandelt sich in $-2\lambda v + \lambda^2 u_2 = 0$, oder in $\lambda(\lambda u_2 - 2v) = 0$; hieraus ergiebt sich $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{2v}{u_2}$. Der erste Werth bezieht sich auf den Punkt A, weil $\frac{AB}{BC} = 0$ ist, wenn A und B zusammenfallen, der zweite auf den zweiten Durchschnittspunkt. Soll derselbe mit dem ersten zusammenfallen, d. h. soll die Gerade AC Tangente werden, so muss auch $v = 0$ sein, und umgekehrt, jeder Punkt, welcher der Gleichung $v = 0$ genügt, liegt auf der Tangente am Punkte (x_1, y_1), d. h.:

die Gleichung der Tangente am Punkte (x_1, y_1) des Kegelschnittes U ist:

$$(3) \quad x(ax_1 + by_1 + d) + y(bx_1 + cy_1 + e) + dx_1 + ey_1 + f = 0.$$

Ist (x_1, y_1) kein Punkt der Curve selbst, so wird die durch (x_2, y_2) gehende Transversale eine Tangente, wenn die Gleichung (2) gleiche Wurzeln hat, d. h. wenn:

$$(4) \quad u_1 u_2 - v^2 = 0$$

ist, und umgekehrt, jeder Punkt (x_2, y_2), welcher der Gleichung (4) genügt, liegt auf einer der von (x_1, y_1) an U gezogenen Tangenten, d. h. schreibt man in u_2 und v statt x_2 und y_2 bezüglich x und y, so ist die Gleichung des Systems der von (x_1, y_1) an (U) gezogenen Tangenten:

$$(5) \quad (ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f) \times (ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f) - \{x(ax_1 + by_1 + d) + y(bx_1 + cy_1 + e) + dx_1 + ey_1 + f\}^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung muss sich in Factoren des ersten Grades in Beziehung auf x und y zerfällen lassen (vgl. §. 101), die einzeln gleich Null gesetzt, die Gleichungen der Tangenten geben. Lassen sich vom Punkte (x_1, y_1) keine Tangenten an die Curve ziehen, so werden jene Factoren imaginär, und man kann in diesem Falle von zwei idealen, durch (x_1, y_1) gehenden Tangenten sprechen.

Will man die Berührungspunkte finden, so muss die Gleichung (5) mit der Gleichung der Curve U verbunden werden. Dadurch verwandelt sich (5) in:

$$(6)\quad x(ax_1+by_1+d)+y(bx_1+cy_1+e)+dx_1+ey_1+f=0.$$

Man kann also zur Bestimmung der Berührungspunkte die Gleichung U statt mit (5) auch mit (6) verbinden; und weil diese Gleichung nur auf den ersten Grad steigt, so ist sie die Gleichung einer Geraden, welche durch die Berührungspunkte geht, oder sie ist die Gleichung der Berührungssehne. Ist (x_1, y_1) ein Punkt der Curve, so fällt die Berührungssehne mit der Tangente zusammen (man vgl. Gleichung (3)). Schneidet (6) die Curve nicht, so sind die beiden Berührungspunkte ideal, die sie verbindende Gerade bleibt jedoch reell. Wir werden weiter unten (§. 92) eine andere Bedeutung der Gleichung (6) kennen lernen.

§. 90. System der Asymptoten. Confocale Kegelschnitte. Wir wollen einige Anwendungen der vorhergehenden Formeln angeben. Hat U einen Mittelpunkt, so erfüllen dessen Coordinaten die Gleichungen (§. 63, Form. 3):

$$ax_1+by_1+d=0,\qquad bx_1+cy_1+e=0,$$

und es wird in Folge derselben:

$$dx_1+ey_1+f=\frac{acf-ae^2-cd^2-fb^2+2bed}{ac-b^2}=\frac{\Delta}{ac-b^2}.$$

Setzt man diese Werthe in (§. 89, Form. 5) ein und erwägt, dass:

$$ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2+2dx_1+2ey_1+f$$
$$=x_1(ax_1+by_1+d)+y_1(bx_1+cy_1+e)+dx_1+ey_1+f,$$

so verwandelt sich die Gleichung der vom Mittelpunkte an die Curve gezogenen Tangenten in:

$$(ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f)\cdot\frac{\Delta}{ac-b^2}-\frac{\Delta^2}{(ac-b^2)^2}=0,$$

oder wenn man mit $\frac{\Delta}{ac-b^2}$ dividirt und für $f-\frac{\Delta^2}{ac-b^2}$ schreibt $\frac{ae^2+cd^2-2bed}{ac-b^2}$, schliesslich in:

$$(1)\quad ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+\frac{ae^2+cd^2-2bed}{ac-b^2}=0.$$

Man überzeugt sich leicht (§. 62), dass die linke Seite in zwei Factoren ersten Grades zerlegbar ist, welche, wenn $ac - b^2$ negativ, also im Fall der Hyperbel, reell sind. Um kurz zu sein, die Gleichung (1) stellt, wenn $ac - b^2$ negativ ist, das System der Asymptoten dar.

Ist $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - 1 = 0$ die Gleichung einer Ellipse, so ist das System der von (x_1, y_1) an dieselbe gelegten Tangenten:

$$(2)\quad \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{p^2} + \frac{y_1^2}{q^2} - 1\right) - \left(\frac{xx_1}{p^2} + \frac{yy_1}{q^2} - 1\right)^2 = 0,$$

oder, wenn man nach x und y ordnet und mit p^2q^2 multiplicirt:

$$(3)\quad x^2(y_1^2 - q^2) - 2xyx_1y_1 + y^2(x_1^2 - p^2) + 2xx_1q^2 + 2yy_1p^2 \\ - (x_1^2q^2 + y_1^2p^2) = 0.$$

Die Halbirungslinien der von den Tangenten gebildeten Winkel haben eine Neigung gegen die x-Axe, welche durch (§. 64, Form. 6) gegeben ist, wenn man dort $\varphi = 90^0$ setzt, woraus:

$$\tang 2\alpha = \frac{2b}{c - a},$$

wo im gegenwärtigen Falle:

$$a = y_1^2 - q^2, \quad b = -x_1y_1, \quad c = x_1^2 - p^2$$

ist. Setzt man diese Werthe ein, so erhält man:

$$\tang 2\alpha = -\frac{2x_1y_1}{x_1^2 - y_1^2 - (p^2 - q^2)}.$$

Legt man von (x_1, y_1) an eine zweite Ellipse $\frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{q_1^2} - 1 = 0$ Tangenten, so wird die Neigung der Halbirungslinien des Tangentenwinkels durch dieselbe Formel gegeben werden, in welcher nur $p_1^2 - q_1^2$ statt $p^2 - q^2$ steht. Ist $p_1^2 - q_1^2 = p^2 - q^2$, so haben beide Tangentenwinkel dieselben Halbirungslinien. Nun bedeutet $\sqrt{p^2 - q^2}$ die halbe Entfernung der beiden Brennpunkte; beide Curven haben demnach dieselben Brennpunkte oder sind confocal; wir haben also den Satz:

Legt man von einem Punkte an zwei um dieselben Brennpunkte beschriebene Ellipsen Tangenten, so ha-

ben die Winkel beider Paare dieselben Halbirungslinien.

Setzt man $p^2 - q^2 = e^2$, so ist die Gleichung aller confocalen Ellipsen:

$$\frac{x^2}{q^2+e^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

Hier bedeutet $2q$ die kleine Axe, $2\sqrt{p^2+e^2}$ die grosse Axe der Curve; nimmt man q immer kleiner an, während e constant bleibt, so nähert sich die Ellipse immer mehr der von den Brennpunkten begränzten Strecke der grossen Axe, und diese Strecke selbst ist als eine Ellipse mit verschwindend kleiner Axe anzusehen. Als die von (x_1, y_1) an diese Gränzcurve des Systems gezogenen Tangenten muss man die den Punkt (x_1, y_1) mit den Brennpunkten verbindenden Geraden betrachten. In der That, setzt man in (3) $q = 0$, $p = e$, so erhält man:

$$x^2y_1^2 - 2xyx_1y_1 + y^2(x_1^2 - e^2) + 2yy_1e^2 - y_1^2e^2 = 0,$$

oder:

$$(4) \quad (xy_1 - y(x_1 - e) - y_1e) \cdot (xy_1 - y(x_1 + e) + y_1e) = 0.$$

Die beiden Factoren, einzeln gleich Null gesetzt, ergeben aber die durch (x_1, y_1) und die Brennpunkte $(e, 0)$, $(-e, 0)$ gezogenen Geraden. Als einen speciellen Fall des vorigen Satzes kann man daher den folgenden betrachten, welcher sich auch direct aus (4) erweisen lässt:

Legt man von einem Punkte i an eine Ellipse zwei Tangenten ih, ik, und verbindet denselben ausserdem mit den Brennpunkten f, f_1, so haben die beiden Winkel hik und fif_1 dieselben Halbirungslinien, oder mit anderen Worten: der Winkel zwischen hi und if ist dem Winkel zwischen ki und if_1 gleich (Fig. 64).

Um den Winkel zu bestimmen, welchen zwei vom Punkte (x_1, y_1) an eine Ellipse gezogene Tangenten bilden, brauchen wir nur Folgendes zu erwägen: Sind die Gleichungen der Tangenten:

$$(5) \quad y - lx - m = 0, \qquad y - l'x - m' = 0,$$

so muss das Product derselben bis auf einen constanten Factor mit

der Gleichung (3) übereinstimmen; derselbe kann nur der Coefficient von y^2 in (3) sein, nämlich $(x_1^2-p^2)$, also ist:

$$(x_1^2-p^2)(y-lx-m)(y-l'x-m')$$
$$=(y_1^2-q^2)x^2-2y_1x_1yx+(x_1^2-p^2)y^2+\cdots,$$

woraus durch Vergleichung der Coefficienten von x^2 und xy auf beiden Seiten:

$$(x_1^2-p^2)ll'=y_1^2-q^2 \quad \text{und:} \quad (x_1^2-p^2)(l+l')=2y_1x_1.$$

Nun ist der Winkel w zwischen den beiden Geraden (5) durch die Formel gegeben:

$$\operatorname{tang} w=\frac{l-l'}{1+ll'}=\pm\frac{\{(l+l')^2-4ll'\}^{\frac{1}{2}}}{1+ll'};$$

also in unserem Falle:

$$\operatorname{tang} w=\pm\frac{\left\{\frac{4y_1^2x_1^2}{(x_1^2-p^2)^2}-\frac{4(y_1^2-q^2)}{x_1^2-p^2}\right\}^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{y_1^2-q^2}{x_1^2-p^2}}$$
$$=\pm\frac{2\{x_1^2q^2+y_1^2p^2-p^2q^2\}^{\frac{1}{2}}}{x_1^2+y_1^2-(p^2+q^2)}.$$

Ist $x_1^2+y_1^2=p^2+q^2$, d. h. liegt (x_1, y_1) auf dem Kreise, der mit dem Radius $\sqrt{p^2+q^2}$ um den Mittelpunkt der Ellipse gezogen ist, so wird $\operatorname{tang} w$ unendlich, also stehen dann die beiden an die Curve gezogenen Tangenten auf einander senkrecht.

§. 91. Der Carnotsche Satz. Bezeichnen wir die Coordinaten von A mit (x_1, y_1), die von B mit (x_2, y_2) und sind γ, γ' die Durchschnitte der Geraden AB mit dem Kegelschnitte:

$$U=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0;$$

nennen wir ferner, wie in §. 89, u_1 den Ausdruck $ax_1^2+2bx_1y_1+\cdots+f$, u_2 den ähnlichen Ausdruck $ax_2^2+2bx_2y_2+\cdots+f$ u. s. w., so sind $\frac{A\gamma}{B\gamma}$, $\frac{A\gamma_1}{B\gamma_1}$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung (§. 89, 2):

$$(1) \quad u_1-2v\lambda+u_2\lambda^2=0,$$

wo v dieselbe Bedeutung hat wie am angeführten Orte. Es ist also:

$$(2)\quad \frac{A\gamma}{B\gamma}\cdot\frac{A\gamma'}{B\gamma'}=\frac{u_1}{u_2}.$$

Ist C ein dritter Punkt (x_3, y_3), und trifft BC die Curve in α, α' und AC in β, β', so hat man ähnlich wie in (2):

$$(2^*)\quad \begin{cases} \dfrac{B\alpha}{C\alpha}\cdot\dfrac{B\alpha'}{C\alpha'}=\dfrac{u_2}{u_3}, \\[2ex] \dfrac{C\beta}{A\beta}\cdot\dfrac{C\beta'}{A\beta'}=\dfrac{u_3}{u_1}, \end{cases}$$

wo u_3 in derselben Weise aus x_3, y_3, wie u_1 aus x_1, y_1, zusammengesetzt ist; multiplicirt man diese drei Gleichungen, so erhält man:

$$(3)\quad \frac{A\gamma}{B\gamma}\cdot\frac{A\gamma'}{B\gamma'}\cdot\frac{B\alpha}{C\alpha}\cdot\frac{B\alpha'}{C\alpha'}\cdot\frac{C\beta}{A\beta}\cdot\frac{C\beta'}{A\beta'}=1.$$

Dieser Satz enthält eine Relation zwischen den Segmenten, welche die Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes mit den Seiten eines Dreiecks auf letzteren bestimmen. Wenn man nachgewiesen hat (siehe weiter unten §. 98), dass schon fünf Punkte einen Kegelschnitt bestimmen, so lässt sich leicht zeigen, dass umgekehrt sechs Punkte α, α', β, β', γ, γ', welche der Gleichung (3) genügen, auf einem Kegelschnitt liegen.

Wenn man in (3) den Punkt C des Dreiecks ABC sich ins Unendliche entfernen lässt, so nähert sich das Verhältniss $C\beta\cdot C\beta'$ zu $C\alpha\cdot C\alpha'$ der Einheit, und man erhält, wenn AC und BC endlich parallel geworden sind:

$$\frac{A\gamma\cdot A\gamma'}{A\beta\cdot A\beta'}=\frac{B\gamma\cdot B\gamma'}{B\alpha\cdot B\alpha'}.$$

Dies ist ein besonderer Fall des Satzes §. 86. Andere specielle Fälle, die sich aus (3) ableiten lassen, wenn von den Durchschnittspunkten α, α', u. s. w. einige zusammenfallen oder ins Unendliche rücken, übergehen wir.

Die Gleichung (3) lässt sich noch auf jedes geschlossene Vieleck verallgemeinern. Es seien z. B. A, B, C, D, E fünf Punkte, welche durch die Geraden AB, BC, CD, DE, EA verbunden sind, also die Ecken eines Fünfecks im allgemeineren Sinne. Sind (x_1, y_1) (x_2, y_2), .. (x_5, y_5) die Coordinaten dieser Punkte, u_1, u_2, .. u_5 die diesen Punkten bezüglich zugehörigen, dem Früheren entsprechend gebildeten Ausdrücke, α, α', β, β', .. ε, ε' die Durchschnittspunkte der Curve mit AB, BC, .. EA, so hat man:

$$\frac{A\alpha\cdot A\alpha'}{B\alpha\cdot B\alpha'}=\frac{u_1}{u_2},\quad \frac{B\beta\cdot B\beta'}{C\beta\cdot C\beta'}=\frac{u_2}{u_3},\quad \frac{C\gamma\cdot C\gamma'}{D\gamma\cdot D\gamma'}=\frac{u_3}{u_4},$$

$$\frac{D\delta\cdot D\delta'}{E\delta\cdot E\delta'}=\frac{u_4}{u_5},\quad \frac{E\varepsilon\cdot E\varepsilon'}{A\varepsilon\cdot A\varepsilon'}=\frac{u_5}{u_1};$$

woraus durch Multiplication:

$$(4)\quad \frac{A\alpha\cdot A\alpha'\cdot B\beta\cdot B\beta'\cdot C\gamma\cdot C\gamma'\cdot D\delta\cdot D\delta'\cdot E\varepsilon\cdot E\varepsilon'}{B\alpha\cdot B\alpha'\cdot C\beta\cdot C\beta'\cdot D\gamma\cdot D\gamma'\cdot E\delta\cdot E\delta'\cdot A\varepsilon\cdot A\varepsilon'}=1.$$

Die in (3) und (4) enthaltenen Sätze rühren von Carnot her.

§. 92. Polare eines Punktes. Behalten wir die Bezeichnungen der vorhergehenden Paragraphen bei, sind also A und B die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), γ und γ' die Durchschnitte von AB mit der Curve (Fig. 65), also $\frac{A\gamma}{B\gamma}$, $\frac{A\gamma'}{B\gamma'}$ die Wurzeln der Gleichung:

$$u_1-2v\lambda+u_2\lambda^2=0,$$

so werden die Punkte A, B; γ, γ' zwei Paar conjugirter harmonischer Punkte sein, wenn $\frac{A\gamma}{B\gamma}+\frac{A\gamma'}{B\gamma'}=0$ (§. 74, Note). Nun ist aber die Summe der Wurzeln der vorliegenden quadratischen Gleichung gleich $2\frac{v}{u_2}$, also wird $\frac{A\gamma}{B\gamma}+\frac{A\gamma'}{B\gamma'}=0$ sein, wenn $v=0$ ist; mit anderen Worten: die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) und die Durchschnittspunkte der durch sie gelegten Geraden mit der Curve $U=0$ sind vier harmonische Punkte, wenn:

$$x_2(ax_1+by_1+d)+y_2(bx_1+cy_1+e)+dx_1+ey_1+f=0$$

ist, und umgekehrt, d. h. legt man durch (x_1, y_1) oder A eine Schaar Transversalen und bestimmt auf jeder derselben zu den beiden Durchschnittspunkten mit der Curve und A den vierten, dem Punkte A conjugirten harmonischen Punkt (x, y), so genügen alle diese Punkte der Gleichung:

$$(1)\quad x(ax_1+by_1+d)+y(bx_1+cy_1+e)+dx+ey+f=0,$$

oder liegen auf einer Geraden L, und umgekehrt, jeder Punkt dieser Geraden ist vierter harmonischer zu A und den beiden Punkten der Curve, die mit ihm und A in einer Geraden liegen.

Man nennt diese Gerade **die Polare des Punktes** (x_1, y_1) oder A in Bezug auf den Kegelschnitt und A **den Pol der Geraden** (1)*). Da die Gleichung der Berührungssehne und der Tangente (§. 89) mit (1) genau übereinstimmt, so folgt daraus, dass für einen äusseren Punkt, von dem aus Tangenten an die Curve möglich sind, die Polare zugleich Berührungssehne ist, und dass für einen Punkt der Curve selbst die Tangente als Polare zu betrachten ist. Die Punkte der Curve haben übrigens allein die Eigenschaft, dass sie auf ihren Polaren liegen; soll dies nämlich der Fall sein, so müssen die Coordinaten x_1 und y_1 statt x und y in die Gleichung (1) gesetzt, dieselbe erfüllen, dadurch ergiebt sich:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f = 0,$$

d. h. der Punkt (x_1, y_1) liegt auf der Curve U selbst.

Als specielle Fälle sind folgende zu bemerken. Denkt man sich durch den Anfangspunkt eine Gerade gezogen:

$$(2) \quad my - lx = 0,$$

auf welcher der Punkt (x_1, y_1) liegt, so ist natürlich $my_1 - lx_1 = 0$, oder $\frac{y_1}{x_1} = \frac{l}{m}$. Dividirt man die Gleichung der Polaren (1) durch x_1 und schreibt statt $\frac{y_1}{x_1}$ seinen Werth, so erhält man:

$$(3) \quad x\left(a + b\cdot\frac{l}{m} + \frac{d}{x_1}\right) + y\left(b + c\cdot\frac{l}{m} + \frac{e}{x_1}\right) + d + e\cdot\frac{l}{m} + \frac{f}{x_1} = 0.$$

---

*) Wenn der Kegelschnitt in ein System zweier gerader Linien degenerirt (§. 66), so kann man mit Rücksicht auf §. 76, Satz I., nach welchem ein harmonisches Strahlenbüschel durch jede Transversale in vier harmonischen Punkten durchschnitten wird, wenn man sich vorstellt, dass die Transversale sich um einen beliebigen festen Punkt eines dieser Strahlen dreht, den conjugirten harmonischen Strahl ansehen als Ort der conjugirten harmonischen Punkte in Beziehung auf die Schnittpunkte mit dem zweiten Strahlenpaar, also als die Polare des festen Punktes in Beziehung auf den durch dieses Strahlenpaar dargestellten Kegelschnitt. Es gehen demnach die Polaren aller Punkte in Beziehung auf ein System zweier geraden Linien als Kegelschnitt durch den Schnittpunkt derselben, und man kann diesen Punkt als Pol irgend einer dritten geraden Linie auffassen. H.

Je weiter sich der Punkt (x_1, y_1) auf der Geraden (2) entfernt, desto kleinere Winkel werden die durch ihn gezogenen Strahlen mit dieser Geraden bilden, bis sie endlich als der Linie (2) parallel anzusehen sind. Da nun als vierter harmonischer Punkt zu den zwei Durchschnitten und dem unendlich entfernten Punkte die Mitte der beiden Durchschnitte anzusehen ist, so hat man hieraus den Satz:

Der Ort der Mitten paralleler Sehnen eines Kegelschnittes ist eine Gerade.

Man erhält die Gleichung derselben aus (3), wenn man x_1 unendlich annimmt; sind demnach die Sehnen der Geraden:

$$my - lx = 0$$

parallel, so liegen ihre Mitten in der Geraden:

$$x\left(a + b \cdot \frac{l}{m}\right) + y\left(b + c \cdot \frac{l}{m}\right) + d + e \cdot \frac{l}{m} = 0,$$

oder:

$$(4) \quad m(ax + by + d) + l(bx + cy + e) = 0.$$

Bekanntlich heisst diese Gerade ein Durchmesser der Curve; aus der Form der Gleichung (4) ist ersichtlich, dass alle Durchmesser durch den Durchschnitt von:

$$(5) \quad \begin{cases} ax + by + d = 0, \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$$

gehen. Der Punkt, in welchem die Durchmesser sich schneiden, ist der Mittelpunkt der Curve (§. 63). Wenn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ oder $ac - b^2 = 0$ (also im Allgemeinen im Falle der Parabel), so sind die Geraden (5) parallel; man findet alsdann, wie schon früher gezeigt, dass alle übrigen Durchmesser den Linien (5) ebenfalls parallel sind.

Anm. 1. Wollte man einen directen Beweis dafür, dass die Mitten paralleler Sehnen in einer Geraden liegen, so würde derselbe so geführt werden können: Jede Gerade, welche (2) oder $y = \frac{l}{m} x$ parallel ist, hat eine Gleichung von der Form $y = \frac{l}{m} x + \varkappa$. Die Abscissen x_1, x_2 ihrer Durchschnitte mit dem Kegelschnitt:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2bx + 2ey + f = 0$$

ergeben sich als Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + 2bx\left(\frac{l}{m}x + \varepsilon\right) + c\left(\frac{l}{m}x + \varepsilon\right)^2$$

$$+ 2dx + 2e\left(\frac{l}{m}x + \varepsilon\right) + f = 0,$$

oder:

$$x^2\left(a + 2b\frac{l}{m} + c\frac{l^2}{m^2}\right) + 2x\left(b\varepsilon + c\varepsilon\frac{l}{m} + d + e\frac{l}{m}\right)$$

$$+ c\varepsilon^2 + 2e\varepsilon + f = 0,$$

also nach einigen Reductionen:

$$x_1 + x_2 = -2\frac{\varepsilon(bm + cl) + md + el}{am^2 + 2blm + cl^2}\cdot m.$$

Sind x und y die Coordinaten der Mitte der beiden Durchschnittspunkte, so müssen sie die Gleichung der Geraden befriedigen, auf welcher die Durchschnittspunkte liegen, also:

$$y = \frac{l}{m}x + \varepsilon;$$

und ausserdem muss sein:

$$x = -\frac{\varepsilon(bm + cl) + md + el}{am^2 + 2blm + cl^2}\cdot m.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen ε, so erhält man:

$$(am^2 + 2blm + cl^2)x + m\left(y - \frac{l}{m}x\right)(bm + cl) + m(md + el) = 0,$$

eine Gleichung, die nach einer einfachen Reduction auf (4) zurückkommt.

Anm. 2. In Bezug auf die Ellipse oder Hyperbel:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 - e^2} - 1 = 0$$

wird die Gleichung der Polaren des Punktes (x', y'):

$$\frac{xx'}{p^2} + \frac{yy'}{p^2 - e^2} - 1 = 0;$$

dieselbe bestimmt auf den Axen die Stücke $\frac{p^2}{x'}$, $\frac{p^2 - e^2}{y'}$; für

den Mittelpunkt $x' = 0$; $y' = 0$ werden dieselben unendlich gross; also ist die Polare des Mittelpunktes unendlich entfernt. Für einen Brennpunkt ist $y' = 0$, $x' = e$, also $x = \frac{p^2}{e}$ die Gleichung der Polaren, welche nichts anderes ist, als die zu jenem Brennpunkte gehörende Directrix (§. 49).

§. 93. Pol einer Geraden. Umgekehrt lässt sich zu jeder Geraden:

$$(1) \quad lx + my + n = 0$$

ein Punkt A finden, welcher der Pol derselben in Bezug auf den Kegelschnitt ist. Vergleicht man die Gleichung (1) mit der Gleichung (1) des §. 92, so sieht man, dass es darauf ankommt, zwei Grössen x_1, y_1 so zu bestimmen, dass die Grössen l, m, n den Ausdrücken:

$$ax_1 + by_1 + d, \quad bx_1 + cy_1 + e, \quad dx_1 + ey_1 + f,$$

nicht gleich, aber proportional werden, d. h. es muss:

$$\frac{l}{ax_1 + by_1 + d} = \frac{m}{bx_1 + cy_1 + e} = \frac{n}{dx_1 + ey_1 + f}$$

sein. Um aus dieser Doppelgleichung x_1, y_1 zu finden, sei λ der Werth der drei gleichen Brüche, also $l = \lambda(ax_1 + by_1 + d)$ u. s. w. oder:

$$(2) \quad \begin{cases} l = a\cdot\lambda x_1 + b\cdot\lambda y_1 + d\cdot\lambda, \\ m = b\cdot\lambda x_1 + c\cdot\lambda y_1 + e\cdot\lambda, \\ n = d\cdot\lambda x_1 + e\cdot\lambda y_1 + f\cdot\lambda, \end{cases}$$

woraus:

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda x_1 = \frac{1}{\Delta}[l(cf - e^2) + m(ed - fb) + n(be - cd)], \\ \lambda y_1 = \frac{1}{\Delta}[l(ed - fb) + m(af - d^2) + n(bd - ae)], \\ \lambda = \frac{1}{\Delta}[l(be - cd) + m(bd - ae) + n(ac - b^2)], \end{cases}$$

wo:

$$\Delta = acf - ae^2 - cd^2 - fb^2 + 2bde,$$

und:

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{l(cf-e^2)+m(ed-fb)+n(be-cd)}{l(be-cd)+m(bd-ae)+n(ac-b^2)}, \\ y_1 = \dfrac{l(ed-fb)+m(af-d^2)+n(bd-ae)}{l(be-cd)+m(bd-ae)+n(ac-b^2)}. \end{cases}$$

Ist Δ von Null verschieden, — ein Fall, den wir hier, um nicht zu weitläufig zu werden, ausschliesslich betrachten wollen, — also $U=0$ nicht in Factoren des ersten Grades zerlegbar, sondern die Gleichung einer (reellen oder imaginären) Curve des zweiten Grades, so sind die in (3) gefundenen Werthe von λx_1, λy_1 und λ endlich. Die Werthe von x_1 und y_1 selbst werden aber unendlich, wenn:

$$l(be-cd)+m(bd-ae)+n(ac-b^2)=0$$

ist. Da aber für den Fall, dass $ac-b^2 \lessgtr 0$, $\dfrac{be-cd}{ac-b^2}=\xi$, $\dfrac{bd-ae}{ac-b^2}=\eta$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Curve sind, so drückt die vorhergehende Gleichung oder $l\xi+m\eta+n=0$ aus, dass die Gerade $lx+my+n=0$ durch den Mittelpunkt der Curve geht. Jede Gerade hat also in Bezug auf eine Curve zweiter Ordnung einen Pol, der ins Unendliche fällt, wenn die Curve durch den Mittelpunkt geht. Für den Fall der Parabel oder $ac-b^2=0$ ergiebt sich ein unendlich entfernter Pol, wenn die Gerade der Axe parallel ist.

Die oben ausgeführten Rechnungen ergeben auch die Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, damit $lx+my+n=0$ eine Tangente der Curve $U=0$ sei. Offenbar müssen dann die durch die Gleichungen (4) dargestellten Coordinaten des Pols dieser Geraden der Gleichung:

$$ax_1^2+2bx_1y_1+cy_1^2+2dx_1+2ey_1+f=0,$$

oder:

$$x_1(ax_1+by_1+d)+y_1(bx_1+cy_1+e)+dx_1+ey_1+f=0$$

genügen. Diese Gleichung verwandelt sich nach (2) in:

$$x_1\frac{l}{\lambda}+y_1\frac{m}{\lambda}+\frac{n}{\lambda}=0, \quad \text{oder:} \quad lx_1+my_1+n=0,$$

d. h. der Pol der Geraden muss in dieser selbst liegen. Substi-

tuirt man in diese Gleichung die Werthe aus (4) und schafft den Nenner fort, so ergiebt sich:

$$(5)\quad l^2(cf-e^2)+m^2(af-d^2)+n^2(ac-b^2)$$
$$+2mn(bd-ae)+2ln(be-cd)+2lm(ed-fb)=0.$$

Umgekehrt lässt sich leicht nachweisen, dass jede Gerade $lx+my+n=0$, für welche die Constanten l, m, n der vorhergehenden Gleichung genügen, eine Tangente des Kegelschnittes ist, weil ihr durch (4) bestimmter Pol in der Geraden selbst liegt.

§. 94. Polaren verschiedener Punkte einer Geraden. Der Umstand, dass in der Gleichung der Polaren des Punktes A oder (x', y'):

$$(1)\quad x(ax'+by'+d)+y(bx'+cy'+e)+dx'+ey'+f=0,$$

oder, wenn man die Glieder nach x' und y' ordnet:

$$x'(ax+by+d)+y'(bx+cy+e)+dx+ey+f=0,$$

die laufenden Coordinaten x, y und die des Punktes x', y' vertauscht werden können, ohne dass die Gleichung selbst sich ändert, führt zu einer Reihe sehr merkwürdiger Sätze.

Es sei (x'', y'') ein zweiter Punkt B, dessen Polare also:

$$(2)\quad x(ax''+by''+d)+y(bx''+cy''+e)+dx''+ey''+f=0;$$

liegt B auf der Polaren von A, so muss zu Folge (1) sein:

$$x''(ax'+by'+d)+y''(bx'+cy'+e)+dx'+ey'+f=0,$$

welche Gleichung auch:

$$x'(ax''+by''+d)+y'(bx''+cy''+e)+dx''+ey''+f=0$$

geschrieben werden kann; dies ist aber gleichzeitig die Bedingung dafür, dass (x', y') auf der Polaren von (x'', y'') liegt, d. h.:

I. Liegt ein Punkt B auf der Polaren eines anderen Punktes A, so liegt auch A auf der Polaren von B.

Denkt man sich eine beliebige Gerade G und ihren Pol A, so liegt also irgend ein Punkt B dieser Geraden auf der Polaren von A, und die Polare von B muss durch A gehen; also:

II. Die Polaren aller Punkte einer Geraden G schneiden sich in einem einzigen Punkte A, dem Pole dieser Geraden.

Sind (x', y'), (x'', y'') zwei Punkte B, B', so sind die Coordinaten irgend eines dritten Punktes B'', der mit ihnen in einer Geraden liegt, $\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}$, $\frac{y'-\lambda y''}{1\mp\lambda}$, wo $\lambda = \frac{B''B}{B''B'}$. Die Polare von B'' ist:

$$x\left(a\cdot\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}+b\cdot\frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}+d\right)$$
$$+y\left(b\cdot\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}+c\cdot\frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}+e\right)$$
$$+d\cdot\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}+e\cdot\frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}+f=0,$$

oder, wenn der Nenner $1-\lambda$ fortgeschafft und geordnet wird:

$$(3)\quad x(ax'+by'+d)+y(bx'+cy'+e)+dx'+ey'+f$$
$$-\lambda\{x(ax''+by''+d)+y(bx''+cy''+e)+dx''+ey''+f\}=0.$$

Nennen wir die Gleichungen der Polaren von (x', y') und (x'', y''), nämlich die Gleichungen (1) und (2), der Kürze halber $p'=0$ und $p''=0$, so ist demnach die Polare von $\left(\frac{x'-\lambda x''}{1-\lambda}, \frac{y'-\lambda y''}{1-\lambda}\right)$ gleich $p'-\lambda p''=0$; sie geht also durch den Durchschnitt der beiden ersten. Für irgend einen vierten Punkt B''' mit den Coordinaten $\left(\frac{x'-\mu x''}{1-\mu}, \frac{y'-\mu y''}{1-\mu}\right)$ ist die Polare $p'-\mu p''=0$. Nach §. 75 ist nunmehr $\lambda:\mu=\frac{\beta''\beta}{\beta''\beta'}:\frac{\beta'''\beta}{\beta'''\beta'}$, wenn β, β', β'', β''' die Durchschnitte irgend einer Geraden mit den Geraden $p'=0$, $p''=0$, $p'-\lambda p''=0$, $p'-\mu p''=0$ bedeuten; wir können also den Satz II. vervollständigen und sagen:

III. Sind B, B', B'', B''' Punkte einer Geraden G, so gehen ihre Polaren durch einen und denselben Punkt A (den Pol dieser Geraden), und treffen jede Transversale in Punkten β, β', β'', β''', so dass:

$$\frac{B''B}{B''B'}:\frac{B'''B}{B'''B'}=\frac{\beta''\beta}{\beta''\beta'}:\frac{\beta'''\beta}{\beta'''\beta'}.$$

Sind demnach B, B', B'', B''' vier harmonische Punkte, so bilden ihre Polaren ein harmonisches Strahlenbüschel.

§. 95. **Pole verschiedener durch einen Punkt gehender Geraden.** Wenn man in den Ausdrücken für die Coordinaten des zu der geraden Linie:

$$p = lx + my + n = 0$$

in Beziehung auf den Kegelschnitt U gehörigen Pols (§. 93, Form. 4) der Kürze wegen statt der Zähler und der Nenner bezüglich die Buchstaben L, M, N einführt, so dass also:

$$(1)\quad \begin{cases} L = \ l(cf - e^2) + m(ed - fb) + n(be - cd), \\ M = m(af - d^2) + n(bd - ae) + \ l(ed - fb), \\ N = n(ac - b^2) + \ l(be - cd) + m(bd - ae), \end{cases}$$

so werden die Coordinaten des Pols der Linie $p = 0$:

$$(2)\quad x_1 = \frac{L}{N}, \qquad y_1 = \frac{M}{N};$$

ebenso gehört zu einer zweiten geraden Linie:

$$p_1 = l_1x + m_1y + n_1 = 0$$

als Pol der Punkt, dessen Coordinaten:

$$(3)\quad x_2 = \frac{L_1}{N_1}, \qquad y_2 = \frac{M_1}{N_1},$$

wo L_1, M_1, N_1 resp. die Werthe bedeuten von L, M, N, wenn man in ihren Ausdrücken (1) l, m, n der Reihe nach durch l_1, m_1, n_1 ersetzt.

Nun ist:

$$l_1L + m_1M + n_1N = lL_1 + mM_1 + nN_1;$$

im Besonderen also sind beide Seiten dieser Gleichung gleichzeitig Null, d. h. wenn der Pol von p auf der Geraden p_1 liegt, so liegt auch der Pol von p_1 auf der Geraden p, und umgekehrt, also:

I. Geht eine gerade Linie G durch den Pol einer anderen geraden Linie G_1, so geht auch G_1 durch den Pol von G.

Es sei jetzt durch den Durchschnitt von p und p_1 beliebig die gerade Linie:

$$p_2 = p - \lambda p_1 = (l - \lambda l_1)x + (m - \lambda m_1)y + n - \lambda n_1 = 0$$

gezogen, so ergeben sich die Werthe der Coordinaten des Pols (x_3, y_3) derselben in Beziehung auf den Kegelschnitt U aus den Gleichungen (2), indem man in den Ausdrücken für L, M, N (1) die Coefficienten l, m, n bezüglich durch $l-\lambda l_1$, $m-\lambda m_1$, $n-\lambda n_1$, d. h. diese Grössen selbst durch $L-\lambda L_1$, $M-\lambda M_1$, $N-\lambda N_1$ ersetzt, also:

$$(4) \quad x_3 = \frac{L-\lambda L_1}{N-\lambda N_1}, \qquad y_3 = \frac{M-\lambda M_1}{N-\lambda N_1};$$

wenn man in diesen Ausdrücken von x_3 und y_3 Zähler und Nenner durch N dividirt und kurz:

$$(5) \quad \lambda' = \frac{\lambda N_1}{N}, \text{ d. h. } = \frac{\lambda\{n_1(ac-b^2)+l_1(be-cd)+m_1(bd-ae)\}}{n(ac-b^2)+l(be-cd)+m(bd-ae)}$$

setzt, so werden dieselben:

$$(6) \quad x_3 = \frac{x_1-\lambda' x_2}{1-\lambda'}, \qquad y_3 = \frac{y_1-\lambda' y_2}{1-\lambda'},$$

welche Gleichungen zeigen (§. 69), dass (x_3, y_3), der Pol von p_2, auf derselben geraden Linie liegt mit den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2), d. h. den Polen von p und p_1, also:

II. Die Pole aller durch einen und denselben Punkt gehenden Geraden liegen auf einer geraden Linie.

Anm. Wenn der Coefficient λ immer kleiner wird, d. h. die Gerade p_2, sich um den Durchschnitt von p und p_1 drehend, unabhängig von dem Sinne der Drehung, der Linie p immer näher kommt, so nähert sich auch der Pol (x_3, y_3), weil λ' zugleich mit λ abnimmt, immer mehr dem Punkte (x_1, y_1), und umgekehrt, wenn von drei auf einer geraden Linie liegenden Punkten zwei unendlich nahe beisammen liegen, so unterscheiden sich von ihren drei Polaren die den beiden letzteren zugehörigen unendlich wenig in ihrer Richtung.

Nimmt man eine vierte Gerade durch den Durchschnitt von p und p_1 an, nämlich:

$$p_3 = p - \mu p_1 = 0,$$

so wird der Pol derselben:

$$x_4 = \frac{x_1-\mu' x_2}{1-\mu'}, \qquad y_4 = \frac{y_1-\mu' y_2}{1-\mu'}, \text{ wo } \mu' = \frac{\mu N_1}{N},$$

und es ergiebt sich:

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\mu}{\lambda},$$

also:

III. Wenn β, β', β'', β''' die Durchschnittspunkte sind einer Transversalen mit vier durch einen und denselben Punkt A gehenden Geraden, so liegen die Pole dieser Geraden, nämlich B, B', B'', B''', auf einer geraden Linie (der Polaren des Punktes A), und es ist:

$$\frac{B''B}{B''B'} : \frac{B'''B}{B'''B'} = \frac{\beta''\beta}{\beta''\beta'} : \frac{\beta'''\beta}{\beta'''\beta'}.$$

Bilden demnach $A\beta$, $A\beta'$, $A\beta''$, $A\beta'''$ ein harmonisches Strahlenbüschel, so sind ihre Pole vier harmonische Punkte.

§. 96. Theorie der reciproken Polaren. Anwendung auf die Kegelschnitte. Wenn man zu jedem Punkte die zugehörige Polare und zu jeder Geraden den zugehörigen Pol construirt, so kann man mit Rücksicht auf die in den beiden letzten Paragraphen entwickelten gegenseitigen Beziehungen von Pol und Polare eines Kegelschnitts zu einem beliebig gegebenen System von Punkten P und Geraden G ein zweites System von Geraden G' und Punkten P' herstellen, so dass jeden drei oder mehreren Punkten P, welche in einer geraden Linie liegen, eine gleiche Anzahl von Geraden G' entsprechen, welche durch einen und denselben Punkt gehen (§. 94, II.), und umgekehrt jeden drei oder mehreren Geraden G, welche sich in demselben Punkte durchschneiden, eine gleiche Anzahl von Punkten P', welche derselben geraden Linie angehören (§. 95, II.).

Man nennt von zwei solchen zusammengehörigen Systemen das eine das reciproke polare System des anderen und die Theorie, vermöge deren man gewisse, und zwar vorzugsweise Situationseigenschaften des einen Systems in bestimmten Modificationen auf das andere übertragen kann, die Theorie der reciproken Polaren.

Das erste System sei eine beliebige geradlinige Figur F, so ist die reciproke polare Figur F' eine geradlinige Figur von gleichviel Ecken und Seiten, weil jeder Ecke oder Seite der einen eine Seite oder Ecke der anderen entspricht. Als einfaches Beispiel zweier solchen reciproken polaren Figuren können etwa ein einem Kegel-

schnitte umschriebenes Vieleck V und dasjenige eingeschriebene Vieleck V' dienen, dessen auf einander folgende Ecken die Berührungspunkte der auf einander folgenden Seiten des ersteren sind; denn nach §. 92 ist jede Berührungssehne (Seite von V') die Polare des Durchschnittspunktes der zugehörigen Tangenten (Ecke von V) und der Berührungspunkt (Ecke von V') jeder Tangente (Seite von V) als deren Pol anzusehen.

Werden die geradlinigen Bestandtheile des Umfanges L der ersten Figur F immer zahlreicher und kürzer, so dass L mehr und mehr in einen continuirlichen, krummlinigen Zug, auf welchen Fall wir uns hier beschränken, übergeht, so nähern sich auch nothwendig die Eckpunkte der Figur F' immer mehr; denn weil jede gerade Linie a durch irgend zwei auf einander folgende geradlinige Elemente β und β_1 von L in Punkten durchschnitten wird, welche immer näher zusammenrücken, so findet (§. 95, Anm. zu II.) dasselbe für die geraden Linien B und B_1 statt, welche von dem Pole der Geraden a aus durch die Pole von β und β_1 gezogen werden, d. h. es rücken auch die Eckpunkte von F', — ausser dieselben fallen ins Unendliche, — einander fortdauernd näher.

Geht endlich der Umfang der einen Figur vollständig in ihren Gränzfall, eine krumme Linie C, über, so wird auch der Umfang der zweiten Figur eine Curve C', und zwar entspricht jedem Punkte der einen eine Tangente der zweiten und umgekehrt. Während man aber die eine dieser beiden Curven definiren kann als erzeugt durch die Bewegung eines Punktes, welcher fortwährend seine Richtung verändert, so hat man die andere zu betrachten als abgegränzt durch die Drehung einer geraden Linie (einer Tangente), welche fortdauernd ihren Drehungsmittelpunkt verändert. Diese Erzeugungsweise krummer Linien durch die Bewegung einer Tangente ist in der allgemeinen Theorie der Curven von derselben Bedeutung als die Entstehung dieser Linien durch die Bewegung eines Punktes.

Aus der gegenseitigen Beziehung zweier reciproken polaren Curven geht hervor, dass die Anzahl der Durchschnittspunkte, welche eine beliebige Transversale G mit der einen ergiebt, im Allgemeinen gleich ist der Anzahl der Tangenten, welche man von einem Punkte P (dem Pol von G) an die zweite legen kann, und umgekehrt. Wenn also die eine Curve ein Kegelschnitt ist, d. h. wenn sich an dieselbe (§. 89) von jedem Punkte aus zwei reelle oder ideale Tangenten legen lassen, so ergiebt die reciproke polare

Curve mit jeder Transversale zwei reelle oder imaginäre Durchschnittspunkte, d. h. diese Curve ist vom zweiten Grade, also ebenfalls ein Kegelschnitt.

Es sei K der Kegelschnitt, in Beziehung auf welchen zu einem zweiten Kegelschnitt C die reciproke polare Curve C' gesucht wird, so ergiebt sich, wenn wir den Fall, wo der Hilfskegelschnitt (K) eine Parabel ist, der Kürze wegen ausschliessen, weil nach §. 93 zu jeder durch den Mittelpunkt von K gelegten Geraden der Pol im Unendlichen liegt, dass, je nachdem sich von diesem Mittelpunkte von K aus zwei reelle, zwei ideale (d. h. keine) oder zwei zusammenfallende, d. h. eine einzige, Tangente an C legen lassen, von dem Kegelschnitt C' in zwei verschiedenen Richtungen, in keiner oder in einer einzigen Richtung ein Punkt im Unendlichen liegt; also:

Je nachdem der Mittelpunkt des Hilfskegelschnitts K ausserhalb, innerhalb, oder auf dem Kegelschnitt C liegt, ist der Polarkegelschnitt C' eine Hyperbel, eine Ellipse oder eine Parabel.

Anm. Zu beachten ist noch, dass die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte C und K auf K zugleich Punkte von C' sind, woraus sich ergiebt, dass C' den Kegelschnitt K in vier, oder in zwei Punkten, oder gar nicht durchschneidet, je nachdem die Kegelschnitte C und K vier, oder zwei, oder gar keine gemeinschaftlichen Tangenten haben; fallen von den gemeinschaftlichen Tangenten zwei zusammen, so fallen von den Schnittpunkten von K und C' zwei als unendlich nahe liegend (§. 95, Anm. zu II.) zusammen, d. h. auch die beiden Kegelschnitte K und C' haben eine Tangente gemeinschaftlich.

§. 97. Beispiel zweier Kreise. Die analytische Lösung der allgemeinen Aufgabe, zu einem gegebenen Kegelschnitt $C = 0$ in Beziehung auf einen zweiten gegebenen Hilfskegelschnitt $K = 0$ den Polarkegelschnitt C' zu finden, wenn man den ersteren als Gränzcurve seiner Tangenten, den letzteren also als Ort seiner Punkte betrachtet, bietet mit Rücksicht auf die bereits dargestellten Gleichungen (§. 93, Form. 4 und 5), welche dabei in Anwendung kommen, abgesehen von der weitläufigen Rechnung, keine besondere Schwierigkeit dar. Wenn man eine beliebige gerade Linie:

$$(1) \quad lx + my + n = 0$$

als Tangente um den Kegelschnitt C herumführt, so beschreibt gleichzeitig ihr Pol in Beziehung auf K den gesuchten Polarkegelschnitt C': man erhält demnach die Gleichung desselben, wenn man aus der Bedingungsgleichung, dass die Linie (1) Tangente von C ist (§. 93, Form. 5), und den Gleichungen ihres Pols in Beziehung auf K (§. 93, Form. 4) die Coefficienten l, m, n, durch welche die Lage von (1) specialisirt wird, eliminirt. In der Ausführung wollen wir uns hier auf den Fall beschränken, wo C und K Kreise sind, die Gleichungen derselben seien für rechtwinklige Coordinaten:

$$C = x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$
$$K = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0,$$

so werden die Gleichungen (5) und (4) aus §. 93 mit den durch unseren besonderen Fall bedingten Modificationen:

$$(2) \quad a^2(l^2 + m^2) = n^2,$$

und:

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{(\alpha^2 - r^2)l + \alpha\beta m + \alpha n}{\alpha l + \beta m + n} = \alpha - \dfrac{r^2 l}{\alpha l + \beta m + n}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{\alpha\beta l + (\beta^2 - r^2)m + \beta n}{\alpha l + \beta m + n} = \beta - \dfrac{r^2 m}{\alpha l + \beta m + n}; \end{cases}$$

die letzten beiden Gleichungen lassen sich, wenn man:

$$(4) \quad x_1 - \alpha = x_2, \quad y_1 - \beta = y_2 \quad \text{und:} \quad \frac{r^2}{\alpha l + \beta m + n} = \delta$$

einführt, ersetzen durch:

$$x_2 + \delta l = 0 \quad \text{und:} \quad y_2 + \delta m = 0,$$

woraus sich mit Berücksichtigung des Werthes von δ ergiebt:

$$l : m : n = x_2 : y_2 : -(\alpha x_2 + \beta y_2 + r^2);$$

diese Werthe in die Gleichung (2) eingesetzt, ergiebt sich als die Gleichung des Polarkegelschnitts:

$$C' = a^2(x_2^2 + y_2^2) - (\alpha x_2 + \beta y_2 + r^2)^2 = 0.$$

In dieser Gleichung kann man x_2 und y_2 ansehen als neue, den anfänglichen Coordinaten x und y parallel gelegte Coordinaten, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt k des Hilfskreises K ist, wie aus den Gleichungen (4) hervorgeht: alsdann ist $x_2^2 + y_2^2$ das Qua-

drat des Abstandes d eines beliebigen Punktes P_2 der Polarcurve von k (Fig. 66) und $(\alpha x_2 + \beta y_2 + r^2)^2$ nach §. 23, Form. (7), abgesehen von dem Factor $\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{c^2}$, wo c die Centrale der beiden Kreise K und C bedeutet, das Quadrat des Lothes p vom Punkte P_2 auf die gerade Linie:

$$(5) \quad \alpha x_2 + \beta y_2 + r^2 = 0.$$

Es ist also der Polarkegelschnitt C' definirt durch die Gleichung:

$$(6) \quad \frac{d^2}{p^2} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \text{oder:} \quad \frac{d}{p} = \pm \frac{c}{a},$$

d. h. dieser Kegelschnitt ist (§. 49) Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem $\frac{c}{a}$ grösser, kleiner oder gleich Eins ist, also die Centrale der gegebenen Kreise C und K grösser, kleiner oder ebenso gross ist als der Radius des Kreises C, oder was dasselbe ist, je nachdem der Mittelpunkt des Hilfskreises ausserhalb, innerhalb oder auf der Peripherie des Kreises C liegt, was mit dem Schlussresultat des vorigen Paragraphen übereinkommt.

In allen Fällen ist k, der Mittelpunkt des Hilfskreises K, ein Brennpunkt des Polarkegelschnitts C', weil durch die Gleichung (6) ausgedrückt wird, dass die Abstände eines beliebigen Punktes P_2 dieses Kegelschnittes von dem Punkte k und der geraden Linie (5) ein constantes Verhältniss haben, ferner geht aus der Gleichung der Geraden (5), d. h. der zu k gehörigen Leitlinie, hervor, dass dieselbe die Polare ist des Mittelpunktes von C in Beziehung auf den Hilfskreis K (vgl. §. 104). Die Construction des Kegelschnitts C' macht darum keine Schwierigkeit. Wenn die beiden Kreise C und K gemeinschaftliche Tangenten zulassen, so sind ebenso viele Punkte von C' von vornherein angebbar (§. 96, Anm.).

Wir werden im folgenden Kapitel noch wiederholentlich Gelegenheit zur Anwendung der Theorie der reciproken Polaren finden.

Elftes Kapitel.

Combination zweier und mehrerer Kegelschnitte.

§. 98. Bestimmung des Kegelschnittes durch fünf Punkte. Die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts:

$$U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

enthält sechs Constanten, welche sich durch Division mit einer derselben, z. B. mit f, und Einführung neuer Constanten an Stelle der Quotienten $\frac{a}{f}, \frac{b}{f}, ..$ auf fünf zurückführen lassen: hieraus folgt, dass ein Kegelschnitt im Allgemeinen durch fünf von einander unabhängige Bedingungen, z. B. durch fünf Punkte, welche er enthalten soll, bestimmt ist.

Um die Gleichung des durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts zu finden, hat man etwa die Coordinaten dieser Punkte der Reihe nach an die Stelle von x und y in die Gleichung $U=0$ einzusetzen, und aus den sich dadurch ergebenden fünf Gleichungen die Verhältnisse der zu bestimmenden Constanten $a:b:c:d:e:f$ abzuleiten. Diese Gleichungen führen als Gleichungen ersten Grades im Allgemeinen zu bestimmten endlichen, reellen Werthen dieser Verhältnisse, und demgemäss ist auch der sich ergebende Kegelschnitt, wenn man als solchen auch das System zweier geraden Linien ansieht, abgesehen von einzelnen Ausnahmefällen, von denen alsbald die Rede sein wird, vollständig bestimmt.

Eine zweite, zu einem übersichtlicheren Resultat führende Methode, die Gleichung des gesuchten Kegelschnittes herzuleiten, besteht darin, dass man erst vier von den gegebenen fünf Punkten als Eckpunkte eines Vierecks durch gerade Linien verbindet: diese Punkte seien A, B, C, D und vier ihrer Verbindungslinien AB, BC, CD, DA der Reihe nach ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} p = lx + my + n = 0, \\ q = l_1x + m_1y + n_1 = 0, \\ r = l_2x + m_2y + n_2 = 0, \\ s = l_3x + m_3y + n_3 = 0; \end{cases}$$

so ist:

$$(2) \quad pr + \mu \cdot qs = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher durch die vier Punkte A, B, C, D hindurchgeht: denn diese Gleichung ist erstens vom zweiten Grade in Beziehung auf x und y, d. h. einem Kegelschnitt angehörend, zweitens wird sie durch die Werthepaare $p = q = 0$, $q = r = 0$, $r = s = 0$, $s = p = 0$ erfüllt, also geht der durch die Gleichung (2) dargestellte Kegelschnitt durch die Durchschnittspunkte A, B, C, D der Linienpaare (1). Nunmehr lässt sich die die noch willkührliche Constante λ dadurch leicht bestimmen, dass man in die linearen Ausdrücke p, q, r, s die Coordinatenwerthe des fünften Punktes E des gesuchten Kegelschnitts einsetzt. Diese Bestimmung von λ ist nicht ausführbar, einmal wenn die vier Gleichungen (1), abgesehen von constanten Factoren, identisch werden, d. h. die vier Punkte A, B, C, D in einer geraden Linie liegen; zweitens wenn von den Punkten A, B, C, D irgend drei, z. B. A, B, C, zugleich mit E auf einer geraden Linie liegen, weil dann durch Einsetzen der Coordinaten von E die Ausdrücke p und q, welche den Verbindungslinien AB und BC zugehören, verschwinden; in beiden Fällen erhält der Werth von λ aus Gleichung (2) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, so dass also der Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte unbestimmt bleibt, wenn mehr als drei derselben auf einer geraden Linie liegen.

Ist der zu suchende Kegelschnitt seiner Form oder Lage nach irgend welchen Beschränkungen unterworfen, d. h. sind eine oder mehrere Gleichungen zwischen seinen Constanten von vornherein zu erfüllen, so verringert sich die Anzahl der zu seiner Bestimmung erforderlichen Punkte um eine oder mehrere; z. B. erfordert eine Parabel (d. h. wenn $ac - b^2 = 0$ ist) zu ihrer Bestimmung nur vier Punkte, ein Kreis (d. h. wenn $a = c$ und $b = 0$ ist (§. 25)) nur drei Punkte, ein Kegelschnitt, von welchem die Axenrichtung und der Mittelpunkt bekannt sind, d. h. in dessen Gleichung unter der Annahme conjugirter Durchmesser als Coordinatenaxen die Coefficienten der Glieder mit xy, x und y verschwinden (§. 61), nur zwei Punkte.

Anstatt gegebener Punkte, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt werden kann, können auch gerade Linien eintreten, welche als Tangenten des Kegelschnitts zu seiner Bestimmung dienen, und

aus der Theorie der reciproken Polaren ergiebt sich, dass, sowie fünf Punkte hinreichend sind zur Bestimmung eines durch sie zu legenden Kegelschnitts, auch fünf gerade Linien im Allgemeinen nur einem einzigen Kegelschnitt als Tangenten zugehören (vgl. §. 105).

§. 99. Kegelschnitte durch vier Punkte, Ort der Mittelpunkte derselben, Verallgemeinerung. Weil durch fünf Punkte, von denen nicht mehr als drei auf einer geraden Linie liegen, nur ein einziger Kegelschnitt möglich ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(1) \quad pr + \lambda qs = 0,$$

in welcher p, q, r, s durch die Gleichungen (1) des vorigen Paragraphen definirt werden und λ ein beliebiger constanter Factor ist, als die allgemeinste Gleichung der durch die vier Punkte A oder $p = q = 0$, B oder $q = r = 0$, C oder $r = s = 0$, D oder $s = p = 0$ gehenden Kegelschnitte. Es kann darum unter der Annahme veränderlicher Werthe von λ Gleichung (1) angesehen werden als die Gleichung aller durch die vier Punkte A, B, C, D zu legenden Kegelschnitte, in der Weise, dass jedem besonderen Werthe von λ ein besonderer Kegelschnitt des Systems entspricht.

Die allen Kegelschnitten des Systems gemeinschaftlichen Punkte sind hierbei aufgefasst als die Durchschnittspunkte der beiden Linienpaare $p = 0$, $r = 0$ und $q = 0$, $s = 0$; man kann diese Linienpaare ersetzen durch irgend zwei die Punkte A, B, C, D enthaltenden Kegelschnitte:

$$(2) \quad \begin{cases} U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ U' = a'x^2 + 2b'xy + c'x^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0, \end{cases}$$

und erhält dann das System der durch dieselben vier Punkte gelegten Kegelschnitte dargestellt durch die Gleichung:

$$(3) \quad U + \lambda U' = 0,$$

wo λ wieder einen Factor bedeutet, welcher für jeden einzelnen Kegelschnitt des Systems einen besonderen Werth annimmt; denn auch diese Gleichung ist im Allgemeinen vom zweiten Grade und wird ausserdem durch jedes Werthsystem von x und y, welches den Gleichungen (2) genügt, befriedigt, d. h. die Gleichung (3) stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch die den Kegelschnitten U und U' gemeinsamen Punkte, also A, B, C, D geht (vgl. §. 102).

Um eine Anwendung dieser für viele Untersuchungen höchst zweckmässigen Darstellungsweise (3) des dieselben vier Punkte enthaltenden Systems von Kegelschnitten zu geben, handle es sich um die Lösung der Aufgabe: den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kegelschnitte zu finden, welche sich durch vier gegebene Punkte legen lassen.

Alsdann hat man λ, den variabeln Parameter, durch dessen Werth der jedesmalige, die Durchschnittspunkte von U und U' enthaltende Kegelschnitt specialisirt wird, aus den Gleichungen des Mittelpunktes des Kegelschnitts:

$$\begin{aligned} U+\lambda U' = (a+\lambda a')x^2 + 2(b+\lambda b')xy + (c+\lambda c')y^2 \\ + 2(d+\lambda d')x + 2(e+\lambda e')y + f+\lambda f' = 0 \end{aligned}$$

zu eliminiren, d. h. wenn man die Coordinaten dieses Mittelpunkts durch ξ, η bezeichnet, aus den Gleichungen (§. 63, Form. 3):

$$\begin{aligned} (a+\lambda a')\xi + (b+\lambda b')\eta + d + \lambda d' = 0, \\ (b+\lambda b')\xi + (c+\lambda c')\eta + e + \lambda e' = 0, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta + d + \lambda(a'\xi + b'\eta + d') = 0, \\ b\xi + c\eta + e + \lambda(b'\xi + c'\eta + e') = 0, \end{aligned}$$

woraus sich ergiebt:

$$(4)\quad (a\xi+b\eta+d)(b'\xi+c'\eta+e')-(a'\xi+b'\eta+d')(b\xi+c\eta+e) = 0.$$

Diese Gleichung ist vom zweiten Grade in Beziehung auf den veränderlichen Mittelpunkt (ξ, η), d. h. sie ergiebt als Ort dieses Punktes einen Kegelschnitt. Ersetzt man in (4) ξ und η bezüglich durch x und y und führt der Kürze wegen:

$$(5)\quad \begin{cases} ax+by+d = s, & a'x+b'y+d' = s', \\ bx+cy+e = t, & b'x+c'y+e' = t' \end{cases}$$

ein, so erhält diese Gleichung folgende Form:

$$(6)\quad st'-ts' = 0,$$

d. h. dieselbe drückt einen Kegelschnitt aus, welcher durch die Schnittpunkte der beiden Linienpaare s, t' und t, s' hindurchgeht, d. h. durch die vier Punkte:

$$s=t=0,\quad t=t'=0,\quad t'=s'=0,\quad s'=s=0,$$

von denen der erste und dritte die Mittelpunkte der beiden Kegelschnitte (2) sind (§. 63, Form. 3), der zweite und vierte aber die Durchschnittspunkte der der Richtung der Coordinatenaxen conjugirten Durchmesser dieser beiden Kegelschnitte (Note zu §. 61), also weil die Richtung der Coordinatenaxen eine ganz beliebige ist, die Durchschnittspunkte der zu irgend welcher Richtung gehörigen conjugirten Durchmesser von U und U', so dass, wenn man beliebige vier parallele Tangenten an die beiden Kegelschnitte U und U' legt, die Berührungssehnen in einem Punkte des Kegelschnitts (6) zusammentreffen.

Stellt man zum Beweise dieses Satzes das System der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kegelschnitte durch die Gleichung (1) dar, so ergeben sich als Punkte des gesuchten Ortes zunächst die Punkte $p = r = 0$ und $q = s = 0$, weil der Schnittpunkt jedes dieser beiden Systeme von Geraden als der Mittelpunkt des durch dasselbe dargestellten Kegelschnitts angesehen werden kann, ferner sind die einer bestimmten Richtung G conjugirten Durchmesser jetzt die vierten harmonischen Strahlen zu den durch die Punkte $p = r = 0$ und $q = s = 0$ der gegebenen Richtung G parallel gezogenen Geraden in Beziehung auf die Linienpaare p, r und q, s selbst (§. 76), darum führt mit Rücksicht auf die beliebige Richtung G der eben gefundene Ort zu folgender Erzeugungsweise der Kegelschnitte:

> Wenn man durch die Schnittpunkte zweier gegebenen Winkel, deren Schenkel sich in den Punkten A, B, C, D durchschneiden, parallele Linien zieht, so schneiden sich die zu jeder derselben in Beziehung auf die Schenkel des zugehörigen Winkels conjugirten harmonischen Strahlen in einem Punkte, welcher bei veränderter Richtung der Parallelen einen Kegelschnitt beschreibt, und zwar den Ort der Mittelpunkte aller durch die Punkte A, B, C, D gehenden Kegelschnitte.

Man kann den Mittelpunkt eines Kegelschnitts als Pol einer unendlich entfernten geraden Linie L ansehen (§. 92), und in diesem Sinne den eben entwickelten Ort und die sich daran anschliessende Erzeugungsweise eines Kegelschnitts als specielle Ergebnisse einer allgemeineren Untersuchung betrachten, bei welcher

die Polare L eine beliebige Lage hat. Um die Lösung auch dieser Aufgabe allgemein zu entwickeln, möge folgender Satz vorausgeschickt werden:

Die Polaren irgend eines Punktes in Beziehung auf alle durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte durchschneiden sich in demselben Punkte.

Das System dieser Kegelschnitte sei, wie vorher, dargestellt durch die Gleichung (3), so ist die Polare eines beliebigen Punktes (ξ, η) in Beziehung auf einen dieser Kegelschnitte (§. 92, Form. 1):

$$(7) \quad P + \lambda P' = 0,$$

wo:

$$(8) \begin{cases} P = (a\xi + b\eta + d)x + (b\xi + c\eta + e)y + d\xi + e\eta + f = 0, \\ P' = (a'\xi + b'\eta + d')x + (b'\xi + c'\eta + e')y + d'\xi + e'\eta + f' = 0 \end{cases}$$

die Polaren des Punktes (ξ, η) in Beziehung auf die beiden Kegelschnitte U und U' sind: die Gleichung (7) wird unabhängig von dem Werthe der Constanten λ erfüllt, wenn $P = 0$ und $P' = 0$ sind, d. h. durch den Durchschnittspunkt der beiden Polaren (8), also gehen durch diesen Punkt die Polaren des Punktes (ξ, η) in Beziehung auf alle durch verschiedene Werthe von λ dargestellten Kegelschnitte des Systems (3).

Man kann nunmehr die Gleichungen (8) auch folgendermassen umformen:

$$P = (ax + by + d)\xi + (bx + cy + e)\eta + dx + ey + f = 0,$$
$$P' = (a'x + b'y + d')\xi + (b'x + c'y + e')\eta + d'x + e'y + f' = 0,$$

oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (5), und wenn man noch die Bezeichnungen:

$$dx + ey + f = q, \qquad d'x + e'y + f' = q'$$

einführt:

$$P = s\xi + t\eta + q = 0,$$
$$P' = s'\xi + t'\eta + q' = 0,$$

woraus durch Auflösung nach ξ und η:

$$\xi : \eta : 1 = (qt' - q't) : (sq' - s'q) : (ts' - t's),$$

d. h. wenn jetzt (ξ, η) sich auf der geraden Linie:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

bewegt, so beschreibt der Schnittpunkt der zugehörigen Polaren den Kegelschnitt:

$$\alpha(qt' - q't) + \beta(sq' - s'q) + \gamma(ts' - t's) = 0,$$

also:

der Ort der Pole einer geraden Linie in Beziehung auf alle Kegelschnitte, welche durch dieselben vier Punkte gehen, ist ein Kegelschnitt.

Weil sich die vier Punkte zu zwei durch drei verschiedene Linienpaare verbinden lassen, und der Pol einer beliebigen geraden Linie in Beziehung auf ein System zweier geraden Linien deren Durchschnittspunkt ist (§. 92), so geht der Polort durch die drei Schnittpunkte der verschiedenen Linienpaare.

Wenn man ferner die gegebenen vier Punkte darstellt als Schnittpunkte zweier Linienpaare und demnach das System der durch sie gelegten Kegelschnitte durch die Gleichung (1), so erhält man mit Rücksicht auf die in der Note zu §. 92 gegebene Definition der Polare eines Punktes in Beziehung auf ein System zweier geraden Linien, nach welcher diese Polare der conjugirte harmonische Strahl zu der Verbindungslinie des Punktes mit dem Schnittpunkte der beiden Linien in Beziehung auf diese Linien selber ist, folgende Erzeugungsweise eines Kegelschnitts:

Wenn man die Scheitelpunkte zweier der Lage nach gegebener Winkel mit einem Punkte P der Ebene derselben verbindet und zu den Verbindungslinien in Beziehung auf die Schenkel der zugehörigen Winkel die conjugirten harmonischen Strahlen zieht, so durchschneiden sich diese in einem Punkte Q: wenn dann P sich auf einer geraden Linie bewegt, so beschreibt Q einen Kegelschnitt, welcher demjenigen Dreieck umschrieben ist, welches die Diagonalen des durch die Schenkel der gegebenen Winkel gebildeten vollständigen Vierseits zu Seiten hat.

Anm. Die Gleichung (2) und die aus derselben hervorgehenden Sätze werden in §. 102 eine allgemeinere Deutung erfahren.

§. 100. **Durchschneidung zweier Kegelschnitte in vier reellen oder imaginären Punkten. Scheinbare Ausnahmefälle.** Sind:

$$(1)\quad \begin{cases} U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \\ U' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so werden durch diejenigen Werthsysteme von x und y, welche beiden Gleichungen zugleich genügen, die Durchschnittspunkte der beiden Kegelschnitte dargestellt.

Um diese Werthsysteme zu erhalten, hat man eine der beiden Unbekannten, z. B. y, aus den beiden Gleichungen zu eliminiren: dazu multiplicirt man etwa die erste derselben mit c', die zweite mit c und subtrahirt alsdann, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(ac' - a'c)x^2 + 2(bc' - b'c)xy + 2(dc' - d'c)x \\ + 2(ec' - e'c)y + fc' - f'c = 0,\end{aligned}$$

woraus:

$$(2)\quad y = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(ac' - a'c)x^2 + 2(dc' - d'c)x + fc' - f'c}{(bc' - b'c)x + ec' - e'c};$$

wenn man diesen Werth in die Gleichung (1) einsetzt und von den Nennern befreit, so erhält man als das gesuchte Eliminationsresultat:

$$(3)\quad \begin{cases} 4(ax^2 + 2dx + f)\{(bc' - b'c)x + ec' - e'c\}^2 \\ - 4(bx + e)\{(bc' - b'c)x + ec' - e'c\}\cdot\{(ac' - a'c)x^2 \\ \qquad\qquad + 2(dc' - d'c)x + fc' - f'c\} \\ + c\{(ac' - a'c)x^2 + 2(dc' - d'c)x + fc' - f'c\}^2 = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen vom vierten Grade in Beziehung auf x und liefert als solche entweder vier reelle, oder vier imaginäre, oder zwei reelle und zwei imaginäre Werthe von x, welche durch ξ bezeichnet werden mögen. Zu jedem Werthe ξ lässt sich alsdann vermittelst der Gleichung (2) im Allgemeinen ein einziger zugehöriger Werth η von y finden.

Nur wenn in den Gleichungen (1) die Glieder mit dem einfachen y ganz fehlen oder zugleich mit y^2 bei der Elimination herausgehen, ist diese Reduction nicht ausführbar: alsdann aber führt die Elimination von y nur auf eine quadratische Gleichung von x, ergeben sich also auch nur zwei Werthe ξ, und weil jetzt jedem

derselben zwei Werthe η entsprechen, auch in diesen Ausnahmefällen immer vier zusammengehörige Werthe von x und y.

Wenn man nun auch für den Fall, wo von den zusammengehörigen Werthen ξ, η einer oder beide imaginär sind, dieselben als Coordinaten eines, alsdann imaginären Durchschnittspunktes bezeichnet, und falls sich gleiche Wurzelpaare ergeben, von zusammenfallenden Durchschnittspunkten spricht, so kann man allgemein behaupten:

Jede zwei Kegelschnitte durchschneiden sich in vier Punkten, von denen stets eine gerade Anzahl reell ist.

Eine scheinbare Ausnahme erleidet dieser Satz, wenn die Constanten der Gleichungen (1) so beschaffen sind, dass in der Gleichung (3) die Glieder der höchsten Dimension verschwinden, was eintritt, wenn die Coefficienten $bc'-b'c$ und $ac'-a'c$ verschwinden, d. h. wenn:

$$(4)\qquad \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\mu,$$

also wenn sich in den Gleichungen der gegebenen Kegelschnitte (1) die Glieder der höchsten Dimension nur durch einen und denselben Factor μ unterscheiden. Alsdann ergiebt sich:

$$(5)\qquad U-\mu U'=2dx+2ey+f-\mu(2d'x+2e'y+f')=0,$$

d. h. eine lineäre Gleichung zwischen x und y, welche mit irgend einer der beiden Gleichungen (1) verbunden, nur zwei Werthsysteme ξ, η, also auch für die Kegelschnitte U und U' nur zwei Durchschnittspunkte liefert.

Um diesen Widerspruch zu lösen, erinnere man sich der Bemerkung zu §. 44, nach welcher die Gleichungen (4), vermittelst deren die Gleichung (3) sich auf die nur quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned}&4(ax^2+2dx+f)(ec'-e'c)^2\\-&4(bx+e)(ec'-e'c)\{2(dc'-d'c)x+fc'-f'c\}\\+&c\{2(dc'-d'c)+fc'-f'c\}^2=0\end{aligned}$$

reducirt, zugleich dahin interpretirt werden können, dass durch sie zwei Wurzeln der Gleichung (3) unendlich gross werden. Dasselbe gilt für die aus den Gleichungen (1) durch Elimination von x hervorgehende Gleichung, so dass also von den Werthsystemen ξ, η zwei sich als unendlich gross ergeben, welche bei dem Elimina-

tionsverfahren vermittelst (5) verloren gehen. Man kann jede zwei Kreise als Kegelschnitte ansehen, für welche die Bedingung (2) erfüllt wird; denn die Beziehungen zwischen den Coefficienten ihrer Gleichungen (§. 25) $a = c$, $b = 0$; $a' = c'$, $b' = 0$ kommen wegen der Unbestimmtheit der Form $\frac{0}{0}$ mit den Gleichungen (4) überein, also:

Jede zwei Kegelschnitte, in deren Gleichungen die Coefficienten der höchsten Dimension sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, ins Besondere jede zwei Kreise, durchschneiden sich ausser in zwei reellen oder imaginären Punkten im Endlichen, im Allgemeinen noch in zwei reellen oder imaginären Punkten im Unendlichen.

Für den Fall, wo $ac - b^2$ negativ ist, also die beiden Kegelschnitte, abgesehen von weiteren speciellen Annahmen, Hyperbeln sind, kann man diese Durchschnittspunkte im Unendlichen leicht darstellen. Es lassen sich nämlich alsdann die Glieder der zweiten Dimension durch die Producte zweier Ausdrücke des ersten Grades mit reellen Coefficienten ersetzen (§. 63). Bezeichnet man diese kurz durch p und q, so werden die Gleichungen der beiden Hyperbeln:

$$(5) \quad \begin{cases} U = \mu \cdot pq + 2dx + 2ey + f = 0, \\ U' = \quad pq + 2d'x + 2e'y + f' = 0; \end{cases}$$

die beiden Geraden $p = 0$ und $q = 0$ sind den Asymptoten dieser Hyperbeln parallel, d. h. die Hyperbeln haben parallele Asymptoten, und weil die Asymptoten als parallele Linien einen Punkt im Unendlichen gemein haben, der zugleich auf den zugehörigen Hyperbeln liegt, so sind die beiden im Unendlichen liegenden gemeinschaftlichen Punkte der Kegelschnitte (5) reell, nämlich die Berührungspunkte derselben mit ihren Asymptoten.

§. 101. Conjugirte imaginäre Schnittpunkte, innere und äussere Punkte eines Kegelschnitts. Die imaginären Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte gruppiren sich, weil nach dem vorigen Paragraphen ihre Coordinaten als Wurzeln algebraischer Gleichungen auftreten, stets paarweise, so dass einem Punkte $\xi = p + qi$, $\eta = p' + q'i$ stets ein zweiter $\xi_1 = p - qi$, $\eta_1 = p' - q'i$ entspricht: die Verbindungslinie jeder zwei solcher Punkte ist reell,

nämlich wenn man die Werthe von ξ, η und ξ_1, η_1 in die Gleichung dieser Linie $\frac{x-\xi}{\xi'-\xi}=\frac{y-\eta}{\eta'-\eta}$ einsetzt und reducirt, so wird dieselbe (vgl. §. 85):

$$qy - q'x + pq' - p'q = 0;$$

man nennt solche zusammengehörige imaginäre Durchschnittspunkte **conjugirte**: dasselbe gilt von den imaginären Schnittpunkten einer geraden Linie mit einem Kegelschnitt.

Wir wollen zu deren Darstellung von der in §. 89 eingeführten Methode Gebrauch machen, nach welcher die Schnittpunkte γ, γ' der Verbindungslinie:

$$(1)\quad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$$

der beiden beliebigen Punkte A oder (x_1, y_1) und B oder (x_2, y_2) mit dem Kegelschnitt:

$$(2)\quad U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

gegeben wurden durch die Gleichung:

$$(3)\quad u_1 - 2\lambda v + \lambda^2 u_2 = 0,$$

wo u_1, v, u_2 dieselbe Bedeutung wie in §. 89 haben und die beiden Wurzeln λ die Verhältnisse $\frac{A\gamma}{B\gamma}$ und $\frac{A\gamma'}{B\gamma'}$ darstellen. Die Schnittpunkte sind reell, zusammenfallend oder imaginär, je nachdem:

$$(4)\quad v^2 - u_1 u_2 >, \; = \text{ oder } < 0$$

ist; es ist jedoch wesentlich zu bemerken, dass jeder reelle Durchschnittspunkt einer Transversalen mit einem Kegelschnitt und ein beliebiger reeller Durchschnittspunkt desselben mit einer anderen Transversalen durch eine reelle gerade Linie verbunden werden können, während ein imaginärer Durchschnittspunkt einer Geraden mit einem Kegelschnitt, und demnach auch zweier Kegelschnitte, den ihm conjugirten in derselben Weise bedingt, wie eine imaginäre Wurzel einer Gleichung die conjugirte, so dass allein zwischen conjugirten imaginären Schnittpunkten, nicht aber zwischen einem reellen und einem imaginären, oder zwischen zwei nicht conjugirten imaginären Schnittpunkten eine reelle Verbindungslinie möglich ist.

Ein Beispiel einer reellen Verbindungslinie conjugirter imagi-

närer Schnittpunkte ist uns bereits bei der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise begegnet, welche auch, wenn die beiden Kreise sich nicht reell durchschneiden, gewisse Eigenschaften der reellen gemeinschaftlichen Sehne der Kreise beibehält und bei Betrachtung der allgemeinen Beziehungen des Systems zweier Kreise unentbehrlich ist (§. 30), und wir werden später nochmals auf die reellen Verbindungslinien conjugirter imaginärer Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zurückkommen. Wenn wir uns zunächst noch auf die Combination eines Kegelschnitts mit einer Transversalen beschränken, so haben wir die Punkte der Ebene in innere und äussere Punkte zu unterscheiden, je nachdem jede durch sie gelegte Transversale den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten durchschneidet, oder die Schnittpunkte auch imaginär sein können.

Es handle sich um die Bestimmung der Lage des Punktes A oder (x_1, y_1): nimmt man den Punkt B oder (x_2, y_2) als veränderlich an, so liegt A innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts, je nachdem für jede Verbindungslinie AB die Bedingung $v^2 - u_1 u_2 > 0$ stattfindet, oder $v^2 - u_1 u_2$ auch gleich und selbst < 0 werden kann (4). Der Ausdruck $v^2 - u_1 u_2$ nimmt, wenn man für v, u_1 und u_2 ihre Werthe (§. 89) einsetzt und nach den Potenzen der Coordinaten des veränderlichen Punktes B, welche jetzt durch x uud y bezeichnet werden mögen, ordnet, folgende Form an:

$$(5) \quad \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \vartheta,$$

wo:

$$\begin{aligned}
\alpha &= A_3 y_1^2 - 2B_1 y_1 + A_2, & \beta &= B_1 x_1 + B_2 y_1 - B_3 - A_3 x_1 y_1, \\
\gamma &= A_1 - 2B_2 x_1 + A_3 x_1^2, & \delta &= B_3 y_1 + B_1 x_1 y_1 - B_2 y_1^2 - A_2 x_1, \\
\vartheta &= A_2 x_1^2 - 2B_3 x_1 y_1 + A_1 y_1^2, & \varepsilon &= B_2 x_1 y_1 + B_3 x_1 - B_1 x_1^2 - A_1 y_1,
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
A_1 &= cf - e^2, & B_1 &= bd - ae, \\
A_2 &= fa - d^2, & B_2 &= eb - cd, \\
A_3 &= ac - b^2, & B_3 &= de - fb.
\end{aligned}$$

Die Coefficienten α, β, γ, .. genügen der Gleichung:

$$\alpha\gamma\vartheta - \alpha\varepsilon^2 - \gamma\delta^2 - \vartheta\beta^2 + 2\beta\delta\varepsilon = 0,$$

d. h. erfüllen die Bedingung dafür, dass der Ausdruck (5) in zwei lineäre Factoren zerlegbar ist (§. 62, Anm.): wenn nun diese Fac-

toren reell sind, so giebt es reelle Werthe von x und y, für welche der Ausdruck $v^2 - u_1 u_2$ verschwindet und selbst das entgegengesetzte Zeichen erhält, d. h. alsdann liegt der Punkt (x_1, y_1) ausserhalb des Kegelschnitts; wenn dagegen die Factoren imaginär sind, so behält der Ausdruck $v^2 - u_1 u_2$ sein Zeichen unverändert bei, derselbe bleibt also, weil u_1 für $x = x_1$, $y = y_1$ verschwindet, und demnach $v^2 - u_1 u_2$ sich auf v^2, einen positiven Ausdruck, reducirt, fortdauernd positiv, welches auch die Werthe von x und y, d. h. die Lage des Punktes B sein mag. In diesem Falle liegt also der Punkt A innerhalb des Kegelschnitts (2). Die Factoren von (5) sind nunmehr reell oder imaginär (§. 62), je nachdem der Ausdruck $\alpha\gamma - \beta^2$ negativ oder positiv ist; es ergiebt sich:

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \varDelta \cdot u_1,$$

wo $\varDelta$ und u_1 die frühere Bedeutung haben, nämlich:

$$\varDelta = acf - ae^2 - cd^2 - fb^2 + 2bde,$$
$$u_1 = ax_1^2 + 2bx_1 y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f;$$

jenachdem also $\varDelta \cdot u_1$ negativ oder positiv ist, liegt der Punkt A ausserhalb oder innerhalb des Kegelschnitts (2). Das Vorzeichen von $\varDelta$ ist unabhängig von der Lage des Punktes (x_1, y_1), so dass allein durch das Vorzeichen von u_1, d. h. des Resultates der Substitution der Coordinaten (x_1, y_1) des Punktes A an die Stelle der laufenden Coordinaten (x, y) des Kegelschnitts, bestimmt wird, ob dieser Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kegelschnitts liegt.

Die Annahme $\varDelta = 0$ ist hierbei durchweg ausgeschlossen: ist $\varDelta = 0$, also der gegebene Kegelschnitt, abgesehen von einigen Ausnahmen, ein System zweier geraden Linien, so ist von inneren und äusseren Punkten desselben nicht mehr die Rede.

§. 102. Das System $U + \mu U' = 0$. Involution. Alle durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte sind (§. 99) in gleicher Allgemeinheit darstellbar durch jede der beiden Gleichungen:

$$(1) \quad U + \mu \cdot U' = 0$$

und:

$$(2) \quad pq + \mu \cdot rs = 0,$$

wo U und U' als quadratische, p, q, r, s als lineäre Ausdrücke mit reellen Coefficienten in x und y gleich Null gesetzt, die ersteren Kegelschnitte, die letzteren gerade Linien darstellen, welche

durch ihre Durchschneidung die vier Punkte ergeben, und μ einen veränderlichen Parameter bedeutet, durch dessen besondere Werthe die einzelnen Kegelschnitte des Systems hervorgehen. Umgekehrt durchschneiden sich alle Kegelschnitte, welche in der Gleichung (2) enthalten sind, in denselben vier Punkten, nämlich $p = r = 0$, $r = q = 0$, $q = s = 0$, $s = p = 0$; die Gleichung (1) dagegen hat eine allgemeinere Bedeutung, wenn die Durchschnittspunkte der Kegelschnitte U und U' aufhören reell zu sein, so dass man bei Untersuchung eines durch diese Gleichung dargestellten Systems von Kegelschnitten die Fälle zu unterscheiden haben würde, ob sich die Kegelschnitte in vier reellen, in zwei reellen und zwei imaginären, oder in vier imaginären Punkten (§. 100) durchschneiden. Es giebt jedoch eine Eigenschaft, in welcher alle in der Gleichung (1) enthaltenen Kegelschnitte ohne Rücksicht auf die gegenseitige Lage oder die Durchschneidung der beiden Fundamentalcurven U und U' übereinkommen, und mit dieser wollen wir uns gegenwärtig beschäftigen.

Es seien U und U', wie früher (§. 99), die beiden Kegelschnitte:

$$(3)\quad U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$(4)\quad U' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0$$

und ein dritter Kegelschnitt:

$$(5)\quad U + \mu U' = (a + \mu a')x^2 + 2(b + \mu b')xy + (c + \mu c')y^2 + 2(d + \mu d')x + 2(e + \mu e')y + f + \mu f' = 0$$

gegeben: wenn man eine beliebige Transversale:

$$(6)\quad x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

hindurchlegt, welche die drei Kegelschnitte der Reihe nach in den Punktepaaren A und A', B und B', C und C' durchschneiden mag, so ergeben sich, wenn C und C' die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind, die Verhältnisse der Abschnitte dieser Transversale $\frac{CA}{C'A}$, $\frac{CA'}{C'A'}$ und $\frac{CB}{C'B}$, $\frac{CB'}{C'B'}$ (§. 89) bezüglich als die Wurzeln der quadratischen Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} u_1 - 2v\lambda + u_2\lambda^2 = 0 \text{ und} \\ u_1^1 - 2v^1\lambda + u_2^1\lambda^2 = 0, \end{cases}$$

wo u_1, v und u_2 dieselbe Bedeutung wie in §. 89 haben und u_1^1, v^1, u_2^1 bezüglich aus ihnen herzuleiten sind durch Vertauschung der Coefficienten $a, b, c, \ldots$ des Kegelschnitts (3) mit den entsprechenden Coefficienten $a', b', c', \ldots$ des Kegelschnitts (4). Man hat darum die Gleichungen:

$$\frac{CA}{C'A} \cdot \frac{CA'}{C'A'} = \frac{u_1}{u_2} \quad \text{und:} \quad \frac{CB}{C'B} \cdot \frac{CB'}{C'B'} = \frac{u_1^1}{u_2^1};$$

weil nun die Punkte C und C' der Annahme nach auf dem Kegelschnitt (5) liegen, so genügen ihre Coordinaten den Gleichungen:

$$u_1 + \mu u_1^1 = 0 \quad \text{und:} \quad u_2 + \mu u_2^1 = 0,$$

woraus sich durch Elimination von μ ergiebt $\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^1}{u_2^1}$, oder:

$$(8) \quad \frac{CA \cdot CA'}{C'A \cdot C'A'} = \frac{CB \cdot CB'}{C'B \cdot C'B'}.$$

Nimmt man die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2), anstatt auf dem Kegelschnitt (5), bezüglich auf den Kegelschnitten (3) und (4) an, so erhält man auf ganz analoge Weise zwischen den Abschnitten der Transversalen die Beziehungsgleichungen:

$$(9) \quad \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}$$

und:

$$(10) \quad \frac{BA \cdot BA'}{B'A \cdot B'A'} = \frac{BC \cdot BC'}{B'C \cdot B'C'},$$

welche Gleichungen man jedoch auch unmittelbar aus (8) durch Darstellung der einzelnen in ihnen vorkommenden Strecken, mit Berücksichtigung ihrer Richtung (§. 69, Anm.), herleiten kann, so dass durch jede der drei Gleichungen (8) bis (10) die Richtigkeit der beiden anderen bedingt wird.

Man sagt nunmehr von drei Punktepaaren einer geraden Linie, zwischen deren gegenseitigen Abständen, mit Beachtung der Richtung derselben, die Gleichungen (8) bis (10) stattfinden, sie stehen

in Involution. Es ergiebt sich aus dieser Definition sofort, dass wenn zwei Paar Punkte mit einem dritten, vierten, .. Punktepaar in Involution stehen, auch jede drei Paar derselben in Involution stehen; denn aus den Gleichungen:

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'} \quad \text{und:} \quad \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AD \cdot AD'}{A'D \cdot A'D'}$$

folgt ohne Weiteres die Involution der Punktepaare A und A', C und C', D und D' u. s. w. Die Punkte eines jeden solchen Paares, wie A und A', B und B', .. nennt man conjugirte und ein ganzes System solcher Punktepaare ein Punktsystem in Involution.

Demnach hat man folgenden allgemeinen Satz:

I. Alle durch die Gleichung $U + \mu U' = 0$ für verschiedene Werthe von μ dargestellten Kegelschnitte werden durch jede Transversale in einem Involutionssystem von Punkten durchschnitten.

Umgekehrt seien die beiden beliebig gegebenen Kegelschnitte U und U' von der Transversalen (6) in den Punktepaaren A und A', B und B' durchschnitten und auf (6) die Punkte C oder (x_1, y_1) und C' oder (x_2, y_2) durch die Gleichung (8) definirt, so ist bei veränderter Lage der Transversalen der Ort der Punkte C ein Kegelschnitt, dessen Gleichung sich unter der Form (1) darstellt; denn unter Zugrundelegung der Gleichung (7) lässt sich die Bedingungsgleichung ersetzen durch die Gleichung:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^1}{u_2^1}, \quad \text{woraus:} \quad \frac{u_1}{u_1^1} = \frac{u_2}{u_2^1} = \mu;$$

folglich genügen die Coordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der beiden Punkte C und C' bezüglich den Gleichungen $u_1 - \mu u_1^1 = 0$ und $u_2 - \mu u_2^1 = 0$, d. h. dieselben liegen auf dem Kegelschnitt:

$$U - \mu U' = 0;$$

also:

II. Wenn man durch irgend zwei Kegelschnitte $U = 0$ und $U' = 0$ eine Transversale legt und auf derselben zu einem beliebig angenommenen festen Punkte C einen

zweiten Punkt C' bestimmt, so dass die Producte der Abstände beider Punkte von den Durchschnittspunkten A und A', B und B' der Transversalen mit beiden Kegelschnitten dasselbe Verhältniss haben, so dass also:

$$\frac{CA \cdot CA'}{C'A \cdot C'A'} = \frac{CB \cdot CB'}{C'B \cdot C'B'}$$

ist, so beschreibt bei einer Drehung der Transversalen um den Punkt C der Punkt C' einen Kegelschnitt, auf welchem C ebenfalls liegt, und dessen Gleichung die besondere Form hat:

$$U - \mu U' = 0,$$

der also, wenn U und U' sich in vier reellen Punkten durchschneiden, durch dieselben vier Punkte hindurchgeht.

Anmerk. Der Kürze wegen soll ein durch die Gleichung $U + \mu U' = 0$ dargestelltes Systen von Kegelschnitten ein Involutionssystem heissen.

In der reciproken polaren Figur gehen (§. 94) die Involutionsgleichungen (8) bis (10) von sechs Punkten einer geraden Linie ungeändert auf die diesen Punkten entsprechenden sechs Strahlen eines Strahlenbüschels über (§. 94, III.); es ergiebt sich demnach durch die Theorie der reciproken Polaren aus dem Satze (I.) folgende Eigenschaft der demselben Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte:

III. Die von einem beliebigen Punkte der Ebene an irgend drei, einem und demselben Vierseit eingeschriebene Kegelschnitte gelegten Tangenten bilden ein Linienbüschel in Involution, d. h. ihre Durchschnittspunkte mit einer beliebigen Transversalen stehen in Involution.

Anmerk. Dieser Satz gestattet ebenso wie Satz (I.) eine Umkehrung; nur ergiebt sich dabei die Eigenschaft, dass die von jedem Punkte der Ebene an die Kegelschnitte gelegten Tangenten ein Strahlenbüschel in Involution bilden, als die allgemeine im Vergleich zu der daraus abgeleiteten, dass die Kegelschnitte einem und dem-

selben Vierseit eingeschrieben sind, weil von den Seiten desselben zwei oder auch alle vier imaginär werden können.

Die Eigenschaft der Involution von sechs Punkten einer geraden Linie enthält die der harmonischen Beziehung von vier Punkten derselben als einen besonderen Fall; wenn nämlich zwei Paar conjugirte Punkte zusammenfallen, z. B. A mit A' und B mit B', so giebt die Gleichung (8) zwischen diesen Punkten, welche alsdann Doppelpunkte des Involutionssystems heissen, und irgend zwei conjugirten Punkten des Systems die Beziehung:

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{C'A}^2} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{C'B}^2}, \quad \text{woraus:} \quad \frac{CA}{C'A} = \pm \frac{CB}{C'B};$$

das obere Vorzeichen ist zu verwerfen, weil C und C' verschiedene Punkte sind (§. 74), und das untere Vorzeichen ergiebt die Punkte C und C' als conjugirt harmonisch zu den Punkten A und B, d. h.:

die Doppelpunkte eines Involutionssystems sind conjugirt harmonisch zu jeden zwei conjugirten Punkten des Involutionssystems,

und mit Anwendung auf unsern Satz (I.):

IV. Wenn man an zwei einem Involutionssystem angehörige Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente legt, so wird dieselbe durch die Berührungspunkte und die Durchschnittspunkte mit jedem dritten Kegelschnitt des Systems harmonisch getheilt.

Die eben dargestellte Beziehung der Doppelpunkte eines Involutionssystems zu den conjugirten Punkten desselben lässt sich vortheilhaft zur Construction conjugirter Punkte benutzen, wenn die Lage der Doppelpunkte bekannt ist, andererseits zu einer einfachen Uebersicht der Vertheilung der Punkte eines Involutionssystems; doch ist wohl zu bemerken, dass die Doppelpunkte nicht immer reell sind. Denn wenn beliebige sechs Punkte eines solchen Systems gegeben sind, z. B. C und C', D und D', E und E', so dass also:

$$(11) \quad \frac{CD \cdot CD'}{CE \cdot CE'} = \frac{C'D \cdot C'D'}{C'E \cdot C'E'} = k$$

ist, so erhält man die Doppelpunkte des Systems A und B durch die Beziehung:

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{\overline{C'A}^2}{\overline{C'B}^2} = k.$$

Wenn nunmehr k negativ ist, d. h. in den Quotienten der beiden Producte in (11) entweder der Zähler oder der Nenner negativ wird, so werden die Doppelpunkte des Involutionssystems imaginär.

Es sei A ein Doppelpunkt der Involution für die Punktepaare C und C', D und D', so hat man zur Definition von A die Gleichung:

$$\frac{\overline{CA}^2}{\overline{C'A}^2} = \frac{CD \cdot CD'}{C'D \cdot C'D'},$$

und es wird eins von den beiden Producten $CD \cdot CD'$ und $C'D \cdot C'D'$ negativ, wenn die Strecken CC' und DD' theilweise auf einander liegen; diese Producte aber erhalten dasselbe Zeichen, wenn diese Strecken ganz ausser oder ganz auf einander liegen, d. h. die Doppelpunkte eines Involutionssystems sind reell, wenn die Abstände der conjugirten Punktepaare ganz ausser oder ganz auf einander liegen, die Doppelpunkte sind imaginär, wenn diese Abstände nur theilweise auf einander liegen.

Wenn zwei Kegelschnitte eines Involutionssystems in Systeme gerader Linien degeneriren, d. h. (weil gerade Linien stets wirkliche Durchschnittspunkte liefern) wenn unter den sich in vier Punkten durchschneidenden Kegelschnitten zwei Linienpaare in Betracht gezogen werden, welche durch die vier gemeinschaftlichen Punkte des Systems hindurchgehen und demnach die Gegenseitenpaare eines dem System von Kegelschnitten gemeinschaftlichen eingeschriebenen Vierecks sind, so ergiebt sich als eine Folgerung aus dem allgemeinen Satze (I.):

V. Die Durchschnittspunkte jeder durch ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck gelegten Transversalen mit den Gegenseitenpaaren desselben und dem Kegelschnitt stehen in Involution.

Man kann die Gegenseitenpaare und zwei Diagonalen eines Vierecks selbst als ein System von drei durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitten ansehen und demnach den Satz (V.) in folgender Form aussprechen:

VI. Die Gegenseitenpaare eines Vierecks und die

beiden die Gegenecken verbindenden Diagonalen werden durch jede Transversale in sechs in Involution stehenden Punkten durchschnitten.

Geht die Transversale durch die Durchschnittspunkte der beiden Gegenseitenpaare des Vierecks, d. h. fällt dieselbe mit der dritten Diagonale zusammen, so reduciren sich deren sechs Durchschnittspunkte auf vier harmonische, d. h.:

VII. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden anderen Diagonalen und die Gegenecken des Vierseits harmonisch getheilt (§. 78).

Wenn von den Eckpunkten des eingeschriebenen Vierecks zwei unendlich nahe rücken, so geht die sie verbindende Gerade in ihren Grenzfall, die Tangente, über; geschieht dasselbe mit den beiden anderen Eckpunkten, so reducirt sich das eingeschriebene Viereck auf ein System zweier Tangenten und die Berührungssehne, welche jedoch als eine Doppellinie anzusehen ist, weil sie durch zwei zusammenfallende Gegenseiten des Vierecks gebildet wird. Aus Satz (I.) ergiebt sich demnach:

VIII. Auf jeder durch einen Kegelschnitt, ein Tangentenpaar und die Berührungssehne gelegten Transversalen ergeben sich fünf Durchschnittspunkte, deren letzterer ein Doppelpunkt der Involution in Beziehung auf die beiden anderen conjugirten Punktepaare ist.

IX. Auf jeder durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts gelegten Transversalen werden durch diesen Punkt und die Durchschnittspunkte mit der Berührungssehne und dem Kegelschnitt vier harmonische Punkte bestimmt (§. 92).

Anm. Durch die Theorie der reciproken Polaren ergeben sich aus den Sätzen (IV.) bis (IX.) ebensoviel Sätze über Kegelschnitte, welche demselben Vierseit eingeschrieben sind und über diese Vierseite selbst, welche wir der Kürze wegen übergehen.

Wir wenden uns nunmehr schliesslich zu den Constructionen von Involutionssystemen von Punkten und bemerken dabei, dass auch diese sich durch die Theorie der reciproken Polaren verdoppeln lassen. Mit Hilfe des Satzes (V.) lässt sich jeder sechste Punkt

eines Involutionssystems durch eine einfache Construction, zu welcher nur das Lineal erforderlich ist, finden:

Gegeben seien (Fig. 67) auf der geraden Linie (G) die beiden Punktepaare A, A' und B, B' als conjugirte Punkte und der Punkt C; um das Involutionssystem durch den Punkt C' zu vervollständigen, lege man durch A, A' und B drei beliebige gerade Linien, bezüglich a, a' und b, verbinde den Punkt (a, b) mit C durch die Linie c und den Punkt (a', c) mit B' durch die Linie b', so schneidet die Verbindungslinie c' der beiden Punkte (a, b') und (a', b) die gerade Linie G in dem verlangten Punkte C'; denn die Linien a, a' und b, b' sind die Gegenseitenpaare eines Vierecks und die Linien c und c' die Diagonalen durch die Gegenecken desselben.

Um zweitens (Fig. 68) auf einer gegebenen geraden Linie G zu zwei gegebenen Punktepaaren A und A', B und B' einen der beiden Doppelpunkte D oder D' des Involutionssystems zu finden, beachte man Folgendes: vermöge der Gleichung

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D}^2} = \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'}$$

hat man die Strecke AA' im Verhältniss von $\alpha = \sqrt{AB \cdot AB'}$ zu $\alpha' = \sqrt{A'B \cdot A'B'}$ zu theilen: dazu construire man über der Strecke BB' den Halbkreis, und je nachdem die Punkte A und A' ausserhalb oder innerhalb desselben liegen (der Fall, wo ein Punkt innerhalb, der andere ausserhalb liegt, ist nach den Bemerkungen zu (11) ausgeschlossen), von A und A' die Tangenten an den Halbkreis, oder in A und A' die senkrechten Halbsehnen, α und α', endlich ziehe man durch die Punkte A und A' zwei Parallelen von der Länge bezüglich α und α', so liefert die Verbindungslinie der freien Endpunkte dieser Parallelen durch ihre Durchschneidung mit der Geraden G einen Doppelpunkt des Systems, und zwar D oder D', je nachdem man die Parallelen von A und A' aus in derselben oder in entgegengesetzter Richtung zieht. Die Lösung dieser Aufgabe führt also, wenn sie überhaupt ausführbar ist, stets zu zwei Doppelpunkten D.

§. 103. Gemeinschaftliche Sehnen, reelle, ideale, imaginäre; reeller Durchschnittspunkt der letzteren. In der Gleichung:

$$(1) \quad U + \mu U' = 0$$

lässt sich der Coefficient μ stets so bestimmen, dass die linke Seite ein Product zweier reellen oder imaginären Factoren wird; denn nach den Entwickelungen des §. 62, Anm. findet dieses Statt, wenn die Bedingungsgleichung:

$$(a+\mu a')(b+\mu b')(c+\mu c')-(a+\mu a')(e+\mu e')^2$$
$$-(c+\mu c')(d+\mu d')^2-(f+\mu f')(b+\mu b')^2$$
$$+2(d+\mu d')(e+\mu e')(f+\mu f')=0$$

erfüllt wird: durch Auflösen der Klammern und Ordnen nach Potenzen von μ ergiebt sich eine kubische Gleichung in Beziehung auf μ von folgender Form:

$$(2) \quad \varDelta+\alpha\mu+\beta\mu^2+\varDelta'\mu^3=0,$$

wo $\varDelta$ und $\varDelta'$ in der früheren Weise aus den Constanten der beiden Kegelschnitte zusammengesetzt sind, nämlich:

$$\varDelta = abc - ae^2 - cd^2 - fb^2 + 2def,$$
$$\varDelta' = a'b'c' - a'e'^2 - c'd'^2 - f'b'^2 + 2d'e'f',$$

die Coefficienten von μ und μ^2 aber, weil für unseren Zweck ohne Interesse, durch α und β bezeichnet sind. Jede kubische Gleichung hat mindestens Eine reelle Wurzel: darum giebt es auch mindestens Einen reellen Werth von μ, welcher der Gleichung (2) genügt, d. h. für welchen die linke Seite von (1) sich in zwei reelle oder imaginäre Factoren zerlegen lässt, die Gleichung (1) also ein System zweier reeller oder imaginärer gerader Linien darstellt.

Ist einer der beiden Kegelschnitte U oder U', welche dem Involutionssystem (1) zu Grunde liegen, selbst ein System zweier gerader Linien, so lässt sich einer der Werthe von μ, für welche (1) ein System zweier gerader Linien wird, sofort angeben. Es verschwindet nämlich alsdann (§. 62) bezüglich $\varDelta$ oder $\varDelta'$, so dass die Gleichung den Wurzelwerth $\mu=0$ oder $\mu=\infty$ erhält: die Liniensysteme $U=0$ oder $U'=0$ sind demnach selbst die Grenzfälle des Involutionssystems (1) und zwar unabhängig davon, ob U oder U' sich in reelle oder imaginäre Factoren des ersten Grades zerlegen lässt.

Es gehört also zu einem Involutionssystem von Kegelschnitten mindestens Ein System von reellen oder imaginären geraden Linien. Sind diese geraden Linien, welche durch:

$$(3)\quad p = 0 \quad \text{und:} \quad p_1 = 0$$

bezeichnet werden mögen, reell, und durchschneiden sich die Kegelschnitte U und U' in vier reellen Punkten, so gehen auch die Linien p und p_1, sowie alle Kegelschnitte des Involutionssystems (1), durch diese vier Punkte, d. h. die Geraden (3) sind gemeinschaftliche Sehnen aller dieser Kegelschnitte; haben dagegen die Kegelschnitte U und U' keinen Punkt gemeinschaftlich, so durchschneiden auch die Linien (3) die Kegelschnitte des Systems (1) gar nicht, behalten jedoch dieselbe Beziehung zu diesem System wie bei der ersten Annahme (§. 102), und man nennt sie darum ebenfalls gemeinschaftliche, doch zur Unterscheidung von den früheren, ideale Sehnen des Systems. Ebenso haben Kegelschnitte eines Involutionssystems, wenn sie alle nicht mehr als zwei reelle Punkte gemeinschaftlich haben, eine reelle und eine ideale gemeinschaftliche Sehne, und wenn endlich das Involutionssystem (1) als Grenzfall ein System zweier imaginärer gerader Linien enthält, so nennt man diese Linien auch alsdann noch gemeinschaftliche, und zwar imaginäre Sehnen des Systems, obschon man bei solchen Geraden nur noch einen einzigen reellen Punkt, ihren sogenannten Durchschnittspunkt, anzugeben vermag.

Solche conjugirte imaginäre Geraden nämlich werden dargestellt durch eine Gleichung zweiten Grades mit reellen Coefficienten von der Form:

$$(4)\quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

unter der Voraussetzung, dass $\Delta = 0$ und $ac - b^2 > 0$ ist (§. 62): die Gleichung $\Delta = 0$ ist aber zugleich die Bedingung dafür, dass sich die linke Seite von (4) in zwei Factoren ersten Grades zerlegen lässt. Bezeichnet man diese, wie oben, durch p und p_1, so muss also das Product pp_1 reell sein, d. h. es müssen p und p_1 conjugirte complexe Ausdrücke werden von der Form:

$$p = s + t\sqrt{-1}, \qquad p_1 = s - t\sqrt{-1},$$

wo s und t wieder x und y nur im ersten Grade, und zwar in reeller Zusammensetzung, enthalten. Für diejenigen Werthe von x und y, durch welche s und t gleichzeitig Null werden, verschwinden auch p und p_1 und demnach auch die linke Seite von (4), d. h. der Schnittpunkt der beiden Linien $s = 0$ und $t = 0$ ist zugleich als ein den beiden imaginären conjugirten geraden Linien

p und p_1 gemeinschaftlicher Punkt zu betrachten, also als ein reeller, durch die Gleichung (4) dargestellter Punkt. Ein solcher Punkt, welcher, als Durchschnittspunkt reeller oder imaginärer Grenzlinien, passend als Grenzpunkt des Involutionssystems (1) für die Annahme imaginärer Schnittpunkte der Kegelschnitte desselben anzusehen ist, hat für dieses System von Kegelschnitten dieselbe Bedeutung, wie der Durchschnittspunkt jeder zwei reeller Grenzlinien eines Involutionssystems: er ist nämlich ein Doppelpunkt der Involution auf jeder durch ihn gelegten Transversalen. — Zur Erläuterung möge folgender specielle Fall dienen:

Wenn in der Gleichung einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, unter Annahme rechtwinkliger Coordinaten, die Halbaxen a und b durch $m \cdot \alpha$ und $n \cdot \alpha$ ersetzt werden, wo m und n Zahlen sind, so stellt für verschiedene Werthe von α die Gleichung:

$$(5) \quad \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = \alpha^2$$

ein System von concentrischen und mit gleicher Axenrichtung versehenen Ellipsen dar, und welche ferner in der Beziehung zu einander stehen, dass jede zwei gleich gerichtete Durchmesser dasselbe Verhältniss zu einander haben; denn setzt man in zwei Gleichungen von der Form (5) mit den verschiedenen Parametern α_1 und α_2 statt x und y resp. $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$r^2\left(\frac{\cos\varphi^2}{m^2} + \frac{\sin\varphi^2}{n^2}\right) = \alpha_1^2 \quad \text{und:} \quad r^2\left(\frac{\cos\varphi^2}{m^2} + \frac{\sin\varphi^2}{n^2}\right) = \alpha_2^2$$

und daraus für denselben Winkel φ, wenn man die zugehörigen Halbmesser der beiden Ellipsen durch r_1 und r_2 bezeichnet:

$$r_1^2 : r_2^2 = \alpha_1^2 : \alpha_2^2;$$

die Ellipsen sind darum einander ähnlich, und die Gleichung (5) drückt demnach für veränderliche Werthe des Parameters α ein System concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen aus; wenn nunmehr α verschwindet, so reduciren sich auch die Halbaxen der zugehörigen Ellipse auf Null, obschon ihr Verhältniss noch das frühere, wie $m:n$, bleibt: die Gleichung dieser Ellipse wird:

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=0, \quad \text{oder:} \quad \left(\frac{x}{m}+\frac{y}{n}\sqrt{-1}\right)\left(\frac{x}{m}-\frac{y}{n}\sqrt{-1}\right)=0;$$

eine solche Gleichung stellt demnach eine Ellipse dar mit unendlich kleinen Axen, d. h. eine Ellipse, welche sich auf einen Punkt, und zwar den Anfangspunkt der Coordinaten reducirt, und in der That werden die letzten Gleichungen durch die einzigen Werthe $x=0$, $y=0$ befriedigt. Diesem analog, drückt die Gleichung:

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=\alpha^2$$

ein System concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Hyperbeln aus, welche für den Fall $\alpha=0$ sich auf:

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=0, \quad \text{d. h.:} \quad \frac{x}{m}+\frac{y}{n}=0 \quad \text{und:} \quad \frac{x}{m}-\frac{y}{n}=0,$$

also auf die allen gemeinschaftlichen Asymptoten reduciren; der Anfangspunkt der Coordinaten erscheint also jetzt als Durchschnittspunkt zweier reeller, wie vorhin zweier imaginärer gerader Linien. —

Es seien nunmehr $p=0$ und $p_1=0$, ohne Rücksicht darauf, ob reell oder imaginär, die Grenzlinien des Systems (1), so lässt sich die Gleichung desselben ersetzen durch:

$$(6) \quad U+\mu p p_1=0,$$

wo μ eine neue beliebige Constante bedeutet, ohne an Allgemeinheit zu verlieren; denn wenn die Grenzlinien des Systems (1) dem Werthe μ_0 des Parameters entsprechen, so dass also, abgesehen von einem Zahlenfactor:

$$pp_1=U+\mu_0 U'$$

ist, so lässt sich U' durch U und pp_1 ausdrücken, so dass sich alsdann in der That für (1) eine Gleichung von der Form (6) ergiebt. Diese Gleichung (6) aber zeichnet sich dadurch sehr vortheilhaft vor der Gleichung (1) aus, dass sie unmittelbar zu einem Doppelpunkt der Involution des ganzen Systems führt, nämlich zu dem Punkte $p=0$, $p_1=0$, welcher stets reell ist.

§. 104. **Doppelter reeller oder imaginärer Contact zweier Kegelschnitte.** Von besonderem Interesse ist der Fall,

wo in dem allgemeinen Involutionssystem von Kegelschnitten $U+\mu pp_1=0$ (§. 103, 6) der Kegelschnitt U durch das Quadrat eines lineären Ausdrucks q ersetzt wird, so dass die Gleichung des Systems wird:

$$(1)\quad q^2+\mu pp_1=0;$$

die gerade Linie $q=0$ ist alsdann eine Doppellinie des Systems (§. 102), und im Besonderen ergiebt dieselbe mit jeder durch den reellen Punkt $p=p_1=0$ gelegten Transversalen als Durchschnittspunkt den zweiten Doppelpunkt der Involution, so dass also jeder solche Schnittpunkt conjugirt harmonisch ist zu dem Punkte $p=p_1=0$, oder kürzer bezeichnet (p, p_1), in Beziehung auf die Durchschnittspunkte der Transversalen mit jedem Kegelschnitt (1). —

Dieser Satz, welcher als specielle Folgerung des Satzes (I.) in §. 102 auftritt, mag hier nochmals einen besonderen Beweis finden: jede den Punkt (p, p_1) durchschneidende gerade Linie ist enthalten in der Gleichung:

$$(2)\quad \nu p+p_1=0;$$

die Gleichungen (1) und (2) vereinigt ergeben die Schnittpunkte des Kegelschnitts (1) und der Transversalen (2): eliminirt man aus beiden Gleichungen p_1, so erhält man $q^2-\mu\nu p^2=0$, d. h. das System der beiden geraden Linien:

$$q+\sqrt{\mu\nu}\cdot p=0 \quad \text{und:} \quad q-\sqrt{\mu\nu}\cdot p=0,$$

welche den Punkt (p, q) mit den Schnittpunkten von (1) und (2) verbinden. Diese Linien aber sind (§. 75) conjugirt harmonisch zu den geraden Linien $p=0$ und $q=0$, woraus sich die Richtigkeit unseres Satzes ergiebt. —

Sind in der Gleichung (1) die lineären Ausdrücke p und p_1 reell, so werden p und p_1 Tangenten und q die zugehörige Berührungssehne jedes Kegelschnitts des Systems (1), weil die alsdann reellen Durchschnittspunkte der Doppellinie q mit den Geraden p und p_1 selbst auf dem Kegelschnitt liegen: die Kegelschnitte (1) berühren sich also alle in diesen Punkten (p, q) und (p_1, q), d. h. sie haben einen doppelten Contact: der Analogie wegen sagt man auch von Kegelschnitten, welche durch die Gleichung (1) dargestellt werden, wenn p und p_1, die gemeinschaftlichen Tangenten, conjugirt imaginär sind, obschon alsdann nur ihr Schnittpunkt reell

bleibt, sie haben einen doppelten imaginären Contact, und nennt q wie früher die gemeinschaftliche Berührungssehne.

Wenn man in diesem Falle für p und p_1 einführt $s+t\sqrt{-1}$ und $s-t\sqrt{-1}$, so ergiebt sich als die Gleichung eines Involutionssystems von Kegelschnitten, welche einen doppelten imaginären Contact haben:

$$(3)\quad q^2+\mu(s^2+t^2)=0,$$

wo q, s, t lineäre Ausdrücke in Beziehung auf x und y mit reellen Coefficienten sind.

Anm. Durch eine Gleichung von der Form (3) wurde (§. 97) der in Beziehung auf den Hilfskreis $x^2+y^2-r^2=0$ zu einem Kreise $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0$ gehörige Polarkegelschnitt ausgedrückt, nämlich durch:

$$(\alpha x+\beta y+r^2)^2-a^2(x^2+y^2)=0;$$

nimmt man in dieser Gleichung a als veränderlich an, so ergiebt sich zur Vervollständigung der Resultate von §. 97:

Zu einem System concentrischer Kreise gehören in Beziehung auf einen beliebigen Hilfskreis als Polarcurven ein System von Kegelschnitten, welche einen doppelten imaginären Contact haben,

und zwar ist der Mittelpunkt des Hilfskreises $x=y=0$, d. h. der gemeinschaftliche Brennpunkt aller dieser Kegelschnitte, der Grenzpnnkt, und die Leitlinie, $\alpha x+\beta y+r^2=0$, die gemeinsame Berührungssehne des Systems. —

Wenn man in der Gleichung (3) den Coefficienten μ, welcher für reelle Kegelschnitte nothwendig negativ sein muss, durch $-\frac{1}{\nu^2}$ ersetzt, so ergiebt sich als die Gleichung eines Systems von Kegelschnitten, welche einen doppelten imaginären Contact haben:

$$(4)\quad s^2+t^2-\nu^2q^2=0,$$

wofür sich auch schreiben lässt:

$$s^2+(t+\nu q)(t-\nu q)=0,\quad \text{oder:}\quad t^2+(s+\nu q)(s-\nu q)=0.$$

Aus den beiden letzten Formen der Gleichung geht hervor, dass s und t die Berührungssehnen sind der Kegelschnitte für die reellen

Tangentenpaare $t+\nu q=0$, $t-\nu q=0$ und $s+\nu q=0$, $s-\nu q=0$, d. h. dass die drei geraden Linien $q=0$, $s=0$, $t=0$ ein Dreieck bilden, dessen Eckpunkte die Pole sind in Beziehung auf die jedesmaligen Gegenseiten als Polaren. Man nennt ein solches Dreieck ein sich selbst conjugirtes, oder kurz Poldreieck, und hat demnach folgenden Satz:

Kegelschnitte mit einem doppelten imaginären Contact haben ein Poldreieck gemeinschaftlich,

und zwar ist der innerhalb aller Kegelschnitte liegende Punkt dieses Dreiecks, $s=t=0$, der Grenzpunkt des Systems; die Gleichungen verschiedener Kegelschnitte in der Form (4) unterscheiden sich nur durch die verschiedenen Werthe das Parameters ν.

Wir wenden uns jetzt zur Erledigung einer in §. 89 angeregten Frage, welche Bedeutung die Gleichung:

$$(5) \quad u_1 u_2 - v^2 = 0$$

hat, wo:

$$u_1 = ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2 + 2dx_1 + 2ey_1 + f,$$
$$u_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f,$$
$$v = (ax_1 + by_1 + d)x + (bx_1 + cy_1 + e)y + dx_1 + ey_1 + f,$$

wenn die beiden Factoren, in welche sich die linke Seite von (5) stets zerlegen lässt (§. 101), conjugirt imaginär sind, d. h. wenn der Punkt (x_1, y_1) innerhalb des Kegelschnitts $u_2=0$ liegt. Bezeichnen wir die Factoren von $u_1u_2-v^2$, dieselben mögen reell oder conjugirt imaginär sein, durch p und p_1, so dass, abgesehen von einem constanten Factor:

$$(6) \quad v^2 - u_1u_2 = pp_1$$

ist, so lässt sich die Gleichung des Kegelschnitts $u_2=0$ ersetzen durch:

$$(7) \quad v^2 - pp_1 = 0;$$

denn wenn man für pp_1 seinen Werth aus (6) einträgt, so ergiebt sich $u_1u_2=0$, d. h. abgesehen von dem Factor u_1, dem Resultate der Substitution der Coordinaten x_1 und y_1 an Stelle von x und y in u_2, dieselbe Gleichung als die des Kegelschnitts $u_2=0$. Aus (7) aber ergiebt sich, dass auf jeder durch den Punkt (p, p_1) ge-

legten Transversalen durch diesen Punkt und die Durchschnittspunkte mit der geraden Linie $v = 0$ und dem Kegelschnitt vier harmonische Punkte bestimmt werden, dass also $v = 0$ die Polare ist des Punktes (p, p_1) in Beziehung auf den Kegelschnitt. Sind p und p_1, die Factoren von $u_1 u_2 - v^2$, reell, so stellen sie, gleich Null gesetzt, zwei Tangenten und $v = 0$ die zugehörige Berührungssehne des Kegelschnitts dar (vgl. §. 89); sind dagegen p und p_1 conjugirt imaginär, so drückt die Gleichung (5) den Pol (Durchschnittspunkt zweier conjugirter imaginärer Tangenten) zur Polare $v = 0$ aus.

§. 105. **Construction eines Kegelschnitts aus gegebenen Elementen.** Zur Anwendung der bisher entwickelten Involutionstheorie mag die Construction beliebig vieler neuer Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts dienen, welcher durch eine hinreichende Anzahl von Punkten oder Tangenten (§. 98) gegeben ist. Die Theorie der reciproken Polaren leistet dabei die wesentlichsten Dienste, weil durch sie mit der Construction jeder einzelnen Aufgabe unmittelbar die Lösung einer verwandten Aufgabe gegeben ist, und es sind darum die entsprechenden Aufgaben einander gegenübergestellt worden.

Ia. **Wenn fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind.**

Irgend vier der gegebenen Punkte als Eckpunkte bestimmen in beliebiger Reihenfolge ein Vierseit, und es ist auf jeder durch den fünften Punkt gehenden Transversalen der diesem Punkte conjugirte sechste Punkt eines Involutionssystems, von welchem zwei Punktepaare die Schnittpunkte mit den Gegenseitenpaaren des Vierseits sind, ein Punkt des gesuchten Kegelschnitts (§. 102, V.).

Ib. **Wenn fünf Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind.**

Irgend vier der gegebenen Tangenten als Seiten bestimmen in beliebiger Reihenfolge ein Viereck, und es ist für jeden auf der fünften Tangente angenommenen Punkt der dieser Geraden conjugirte sechste Strahl eines Involutionsbüschels, von welchem zwei Strahlenpaare die Verbindungslinien mit den Gegeneckenpaaren des Vierecks sind, eine Tangente des gesuchten Kegelschnitts.

IIa. **Wenn vier Punkte und eine Tangente gegeben sind.**

IIb. **Wenn vier Tangenten und ein Punkt gegeben sind.**

Die gegebenen Punkte als Eckpunkte bestimmen in beliebiger Reihenfolge ein Vierseit, dessen Gegenseitenpaare die gegebene Tangente in den Punktepaaren A und A', B und B' treffen mögen: also lässt sich der Berührungspunkt C dieser Tangente, d. h. ein fünfter Punkt des gesuchten Kegelschnitts, finden als Doppelpunkt eines Involutionssystems durch Construction der Gleichung:

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C}^2} = \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'};$$

man erhält dadurch zwei Punkte C (§. 102) und demnach zwei verschiedene Lösungen der Aufgabe.

Die gegebenen Tangenten als Seiten bestimmen in beliebiger Reihenfolge ein Viereck, dessen Gegeneckenpaare mit dem gegebenen Punkte verbunden die Strahlenpaare A und A', B und B' liefern mögen: also lässt sich die durch diesen Punkt gehende Tangente C, d. h. eine fünfte Tangente des gesuchten Kegelschnitts, finden als Doppelstrahl eines Involutionsbüschels durch Construction der Gleichung:

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C}^2} = \frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'};$$

man erhält dadurch zwei Tangenten C und demnach zwei verschiedene Lösungen der Aufgabe.

IIIa. **Wenn drei Punkte und zwei Tangenten gegeben sind.**

Die Punkte seien (Fig. 69) p_1, p_2, p_3, der Durchschnittspunkt der Tangenten t_1 und t_2 heisse C, die Durchschnittspunkte ferner der Verbindungssehnen p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2 mit den Tangenten t_1 und t_2 bezüglich A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3: so ist die Berührungssehne S zu finden; denn diese liefert mit den gegebenen Tangenten zwei neue Punkte des gesuchten Kegelschnitts. Nach §. 102, VIII. ist der Durchschnittspunkt der Berührungssehne S mit irgend einer Transversalen ein Doppelpunkt

IIIb. **Wenn drei Tangenten und zwei Punkte gegeben sind.**

Die Tangenten seien t_1, t_2, t_3, die Verbindungslinie der Punkte p_1 und p_2 heisse C, die Verbindungslinie ferner der Durchschnittspunkte (t_2t_3), (t_3t_1), (t_1t_2) mit den Punkten p_1 und p_2 bezüglich A_1 und B_1, A_2 und B_2, A_3 und B_3: so ist der Schnittpunkt S der Tangenten an p_1 und p_2 zu finden; denn dieser liefert mit den gegebenen Punkten verbunden zwei neue Tangenten des gesuchten Kegelschnitts. Die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes S mit irgend einem Schnittpunkte zweier

der Involution dieser Transversalen zu deren Durchschnittspunkten mit den beiden Tangenten und dem Kegelschnitt: bezeichnet man also die Durchschnittspunkte der Berührungssehne mit den beiden Transversalen $p_2 p_3$ und $p_3 p_1$ bezüglich durch X und Y, so ergeben sich zur Bestimmung dieser Punkte die Gleichungen:

$$\frac{\overline{A_1 X}^2}{\overline{B_1 X}^2} = \frac{A_1 p_2 \cdot A_1 p_3}{B_1 p_2 \cdot B_1 p_3}$$

und:

$$\frac{\overline{A_2 Y}^2}{\overline{B_2 Y}^2} = \frac{A_2 p_3 \cdot A_2 p_1}{B_2 p_3 \cdot B_2 p_1};$$

diese Gleichungen liefern zwei Punkte X und zwei Punkte Y, d. h. es giebt vier verschiedene Lagen der Berührungssehne S und demnach vier verschiedene Kegelschnitte, welche der Aufgabe entsprechen.

Tangenten ist ein Doppelstrahl des Involutionsbüschels zu den Verbindungslinien mit den Berührungspunkten der beiden Tangenten und den Tangenten an den Kegelschnitt: bezeichnet man also die Verbindungslinien des Schnittpunktes S mit den Schnittpunkten der Tangentenpaare $(t_2 t_3)$ und $(t_3 t_1)$ bezüglich durch X und Y, so ergeben sich zur Bestimmung dieser Linien die Gleichungen:

$$\frac{\overline{A_1 X}^2}{\overline{B_1 X}^2} = \frac{A_1 t_2 \cdot A_1 t_3}{B_1 t_2 \cdot B_1 t_3}$$

und:

$$\frac{\overline{A_2 Y}^2}{\overline{B_2 Y}^2} = \frac{A_2 t_3 \cdot A_2 t_1}{B_2 t_3 \cdot B_2 t_1};$$

diese Gleichungen liefern zwei Linien X und zwei Linien Y, d. h. es giebt vier verschiedene Lagen des Schnittpunktes S der Tangenten an p_1 und p_2 und demnach vier verschiedene Kegelschnitte, welche der Aufgabe entsprechen.

§. 106. Der Pascalsche Satz mit seinen Folgerungen. Die drei Gleichungen:

$$(1) \quad U = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$
$$(2) \quad U + \mu \cdot pq = 0,$$
$$(3) \quad U + \nu \cdot pr = 0,$$

wo p, q, r lineäre Ausdrücke in Beziehung auf x und y mit reellen Coefficienten sind, drücken drei Kegelschnitte aus, welche eine Sehne, nämlich die Linie $p = 0$, gemeinschaftlich haben; ausserdem sind $q = 0$ und $r = 0$ die Verbindungslinien der übrigen beiden reellen

oder conjugirten imaginären Durchschnittspunkte, bezüglich des ersten und zweiten, und des ersten und dritten Kegelschnitts. Durch Subtraction der zweiten und dritten Gleichung ergiebt sich:

$$p(\mu q - \nu r) = 0,$$

also die Gleichung eines neuen Kegelschnittes, welcher durch die Schnittpunkte der Kegelschnitte (2) und (3) geht: dieser Kegelschnitt degenerirt in das System der beiden geraden Linien $p = 0$ und $\mu q - \nu r = 0$, d. h. die letzte Gleichung gehört der Verbindungslinie der beiden übrigen Schnittpunkte der Kegelschnitte (2) und (3) an. Die drei Linien $q = 0$, $r = 0$, $\mu q - \nu r = 0$ gehen durch denselben Punkt (q, r), also:

I. Wenn drei Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Sehne haben, so durchschneiden sich die drei übrigen, je zweien derselben gemeinschaftlichen Sehnen in einem und demselben Punkte.

Kreise sind anzusehen als Kegelschnitte, welche eine gemeinschaftliche (ideale) Sehne im Unendlichen haben (§. 100), also:

II. Die gemeinschaftlichen reellen oder imaginären Sehnen dreier Kreise gehen durch denselben Punkt (§. 30, II.).

Wenn die Kegelschnitte (2) und (3) Systeme zweier geraden Linien werden, so lässt sich Satz I. folgendermassen darstellen:

Wenn durch einen Kegelschnitt U zwei Paar gerader Linien gelegt werden (Fig. 70), nämlich a, a_1 und b, b_1, von denen sich a und b, sowie a_1 und b_1 auf dem Kegelschnitt durchschneiden, so gehen die drei Verbindungslinien der zweiten Durchschnittspunkte der gegebenen Linienpaare mit U und unter sich, nämlich:

a_2, die Verbindungslinie der Punkte	(a, U)	und	(a_1, U),
b_2, - - - -	(b, U)	-	(b_1, U),
c_2, - - - -	(a, b_1)	-	(a_1, b),

durch denselben Punkt.

Die sechs geraden Linien a, b in der Reihenfolge a, b, b_2, b_1, a_1, a_2 sind die Seiten eines dem Kegelschnitt U eingeschriebenen Sechsecks: es ist also von einem solchen nachgewiesen, dass

die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Seitenpaare a, b_1 und b, a_1 durch den Schnittpunkt des Seitenpaars a_2, b_2 geht, also:

III. Bei jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die drei Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare auf einer geraden Linie.

Dieser Satz rührt von Pascal her, und man nennt darum ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Sechseck gewöhnlich ein Pascalsches Sechseck. Der reciproke polare Satz ist als eine der ersten und hauptsächlichsten Anwendungen der Theorie der reciproken Polaren von Brianchon gegeben worden, nämlich:

IV. Bei jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Sechsseit gehen die drei Verbindungslinien der Gegeneckenpaare durch einen und denselben Punkt.

Die Sätze (III.) und (IV.) sind darum von so grosser Bedeutung für die Theorie der Kegelschnitte, weil sie auf die einfachste Weise den geometrischen Zusammenhang jedes sechsten Punktes oder jeder sechsten Tangente eines Kegelschnitts, von welchem bezüglich fünf Punkte oder fünf Tangenten ihrer Lage nach bekannt sind, mit diesen gegebenen Bestimmungsstücken darthun (§. 105, Ia. und Ib.). Wir beschränken uns hier auf wenige Folgerungen dieser Sätze: Wenn von den auf einander folgenden Eckpunkten des eingeschriebenen Sechsecks zwei unendlich nahe rücken, so dass die sie verbindende Sehne eine Tangente des Kegelschnitts wird, so ergiebt sich aus (III.) der Satz:

V. In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfeck durchschneidet die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte von zwei Paar abwechselnden Seiten, z. B. der ersten und dritten und der zweiten und vierten, die letzte (fünfte) Seite in einem Punkte der an den Kegelschnitt in dem der fünften Seite gegenüberliegenden Eckpunkte (2, 3) gelegten Tangente,

und der reciproke polare Satz:

VI. In jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Fünfseit durchschneidet die gerade Linie, welche den Schnittpunkt der Verbindungslinien von zwei Paar abwechselnden Eckpunkten, z. B. des ersten und dritten

und des zweiten und vierten, mit dem letzten (fünften) Eckpunkte verbindet, die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seite (2, 3) in ihrem Berührungspunkte.

Die Anwendung dieser beiden Sätze auf die Vervollständigung der im vorigen Paragraphen angegebenen Constructionen der Punkte oder Tangenten eines Kegelschnitts aus gegebenen Stücken ist ohne Weiteres klar.

Wenn zwei Seiten des eingeschriebenen Sechsecks Tangenten des Kegelschnitts werden, so ergiebt sich aus (III.) folgende Eigenschaft des eingeschriebenen Vierecks:

VII. Der Durchschnittspunkt der Tangenten an jeden zwei Gegenecken eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks liegt mit den beiden Schnittpunkten der Gegenseitenpaare auf einer geraden Linie,

und der reciproke polare Satz:

VIII. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte jeder zwei Gegenseiten eines einem Kegelschnitt umschriebenen Vierseits trifft mit den Verbindungslinien der Gegeneckenpaare in demselben Punkte zusammen.

Aus den Sätzen VII. und VIII. geht ein eigenthümlicher Zusammenhang zwischen den durch vier Punkte eines Kegelschnitts als Eckpunkte bestimmten eingeschriebenen drei Vierecken und den durch dieselben vier Punkte als Berührungspunkte der Seiten bestimmten umschriebenen drei Vierseiten hervor, nämlich:

IX. Die Seiten der drei eingeschriebenen Vierecke durchschneiden sich ausser in den vier Punkten des Kegelschnitts noch in drei Punkten A, B, C, und die Eckpunkte der drei umschriebenen Vierseite liegen ausser auf den vier Tangenten des Kegelschnitts noch auf drei geraden Linien a, b, c: jede dieser Geraden geht durch zwei jener Punkte, d. h. es wird durch die Punkte A, B, C als Eckpunkte und die Linien a, b, c als Seiten ein und dasselbe Dreieck bestimmt.

Man kann auf der Transversalen, welche den Durchschnittspunkt der Diagonalen eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks mit dem Durchschnittspunkte zweier Gegenseiten verbindet, diese

beiden Durchschnittspunkte als Doppelpunkte der Involution ansehen (§. 102, V. und VI.): darum sind diese Punkte conjugirt harmonisch zu den Schnittpunkten der Transversalen mit dem Kegelschnitt und ist ferner die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte beider Gegenseitenpaare die Polare des Durchschnittspunktes der Diagonalen: dies auf alle drei eingeschriebenen Vierecke angewandt ergiebt den Satz:

X. Jeder von den drei Punkten, in denen sich die Verbindungslinien von vier auf einem Kegelschnitt liegenden Punkten, ausser auf dem Kegelschnitt, durchschneiden, ist der Pol der Verbindungslinie der beiden anderen.

Es wird also durch diese Punkte ein sich selbst conjugirtes Dreieck bestimmt (§. 104); dasselbe ist gemeinschaftlich für alle durch dieselben vier Punkte gehenden Kegelschnitte, also:

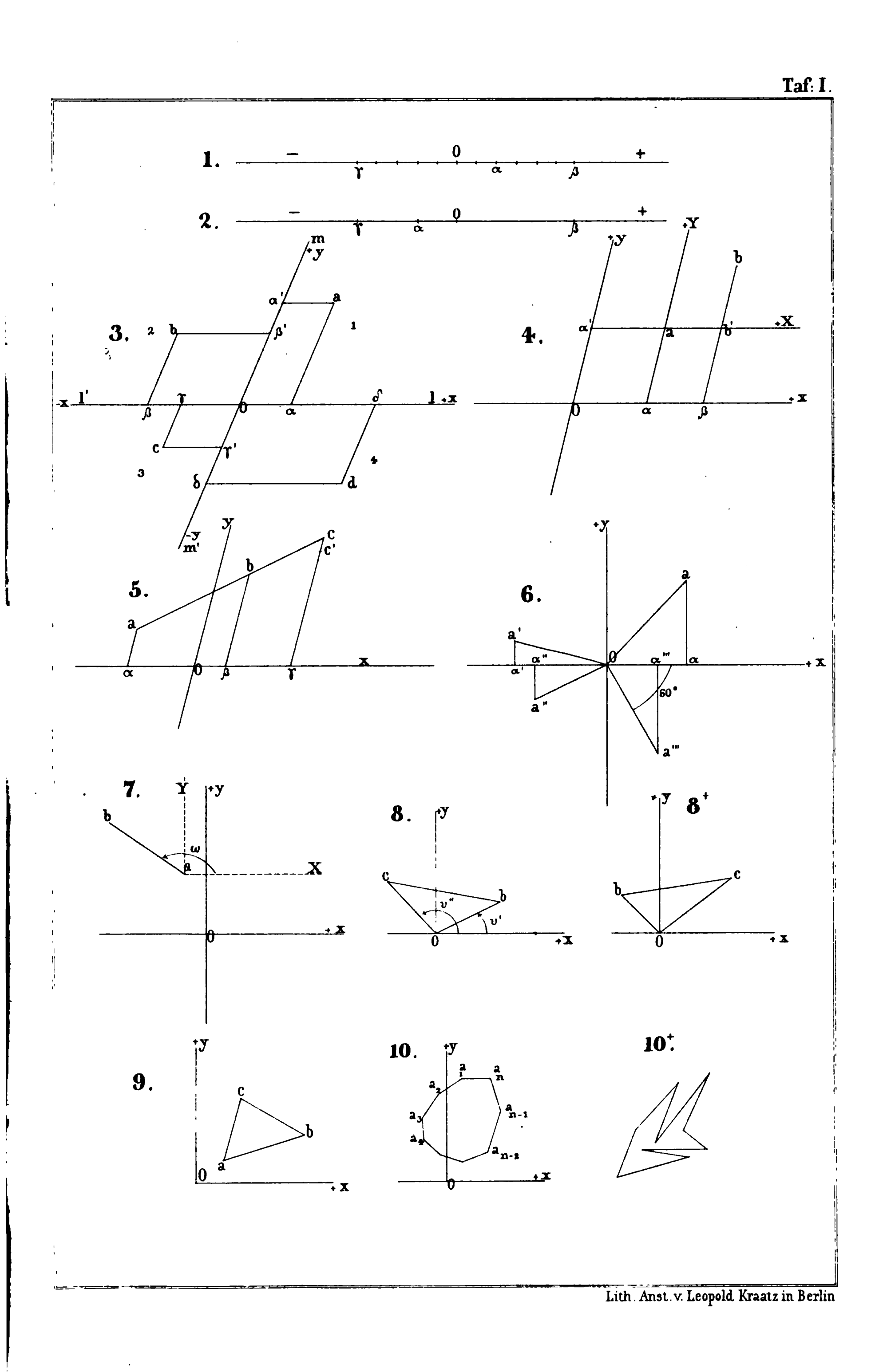
XI. Alle sich in denselben vier Punkten durchschneidenden Kegelschnitte haben ein sich selbst conjugirtes Dreieck gemeinschaftlich, nämlich dasjenige Dreieck, welches die Diagonalen der durch die vier Punkte bestimmten Vierecke zu Seiten hat (vgl. §. 104),

und der reciproke polare Satz lautet:

XII. Alle dieselben vier geraden Linien berührenden Kegelschnitte haben ein sich selbst conjugirtes Dreieck gemeinschaftlich, nämlich dasjenige Dreieck, welches die Durchschnittspunkte der Verbindungslinien der Gegenecken der durch die vier geraden Linien bestimmten Vierseite zu Eckpunkten hat.

Wenn endlich, wie in (IX.), die Eckpunkte eines einem Kegelschnitt eingeschriebenen Vierecks die Berührungspunkte der Seiten eines umschriebenen Vierseits sind, also Viereck und Vierseit sich als reciproke polare Figuren entsprechen, so haben dieselben das sich selbst conjugirte Dreieck gemeinschaftlich.

Taf. I.



Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin.

21.

22.

23.

25.

24.

26.

27.+

27.

29.

28.

Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin.

30.

30.⁺

32.

31.

33.

34.

35.

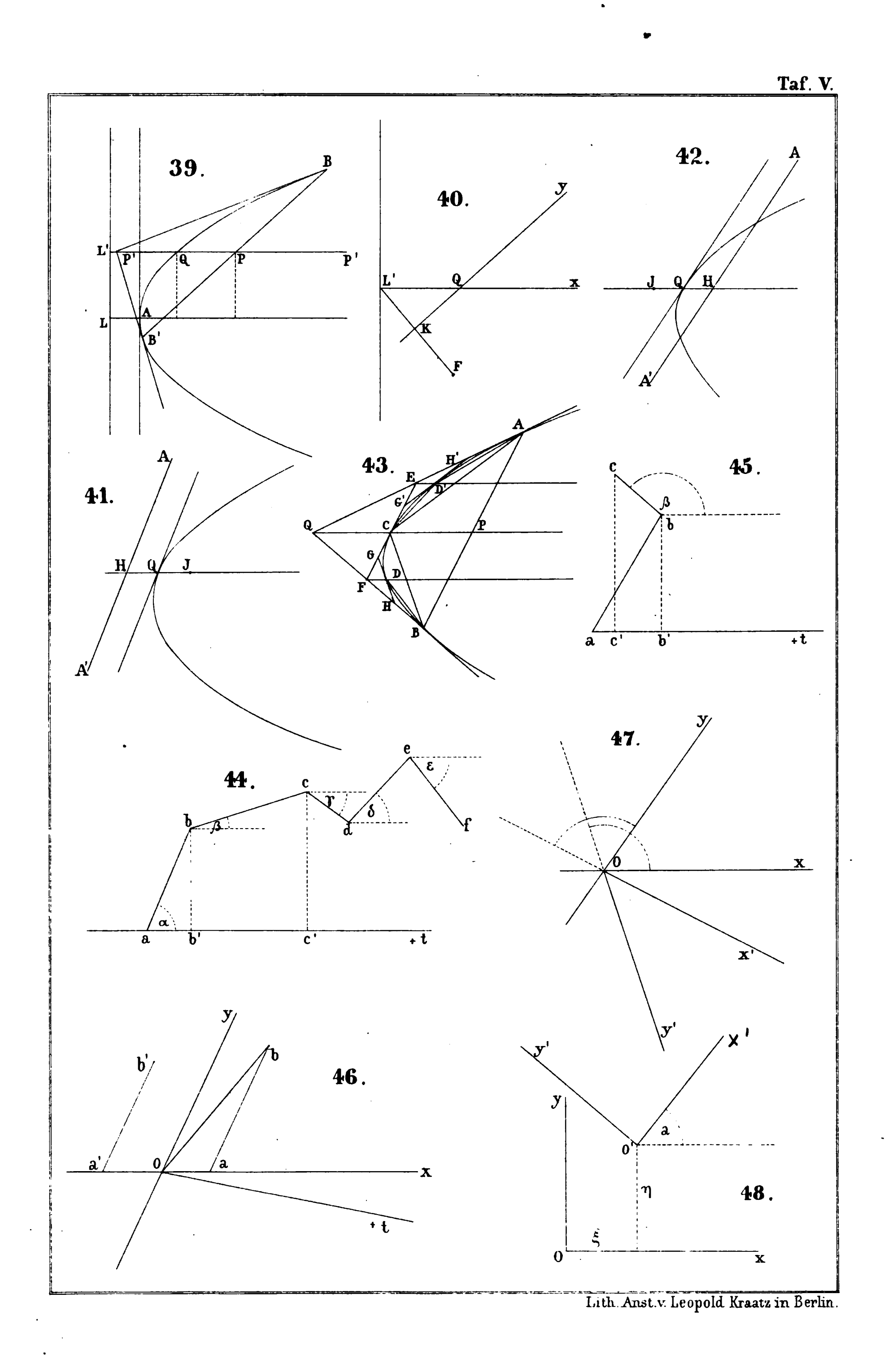
36.

37.

38.

38.⁺

Lith. Anst v. Leopold Kraatz in Berlin



Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin.

49.

50.

51.

52.

53.

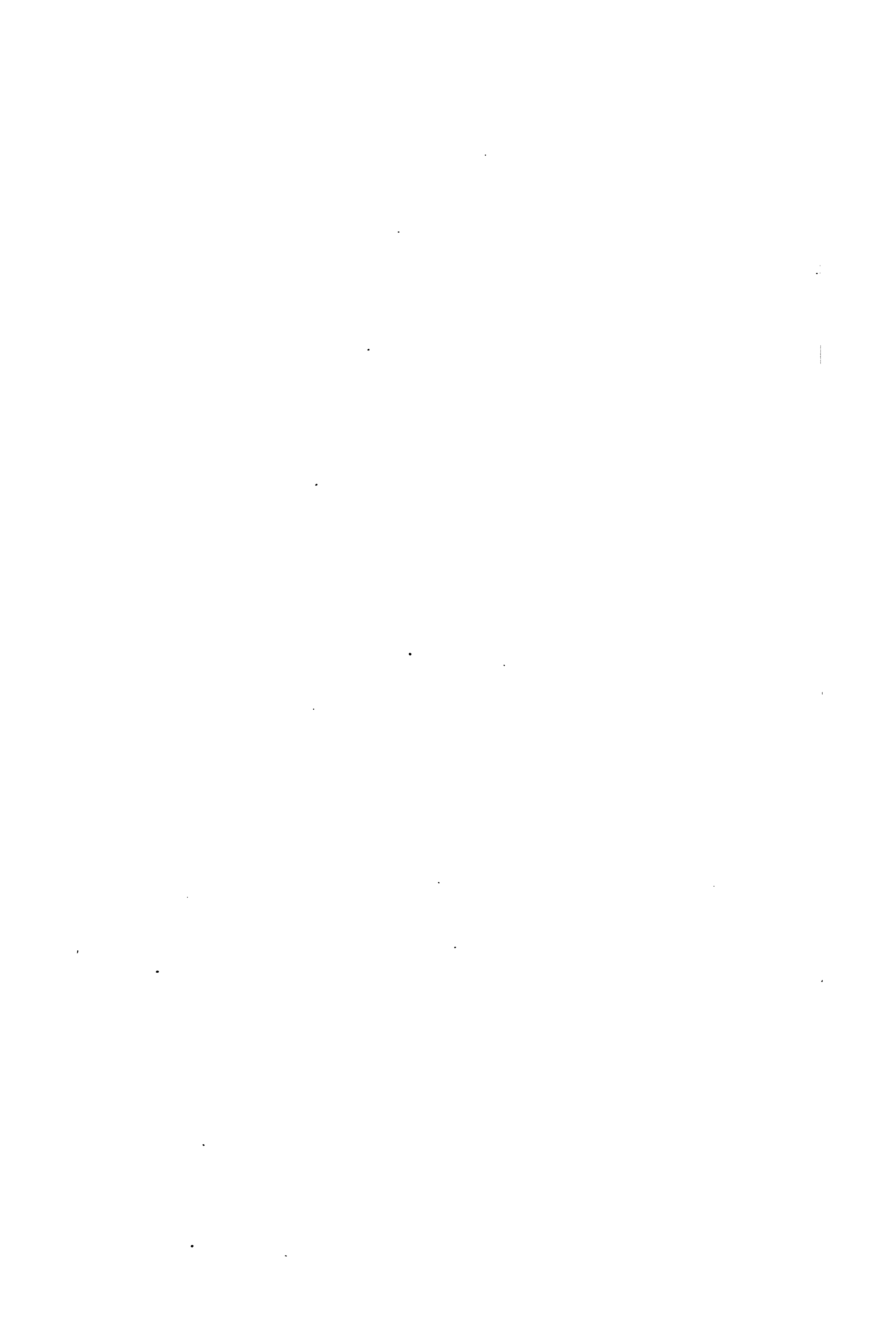
54.

56.

55.

57.

Lith. Anst v. Leopold Kraatz in Berlin.



Taf. VII.

58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65.

Lith. Anst. v. Leopold Kraatz in Berlin.

66.

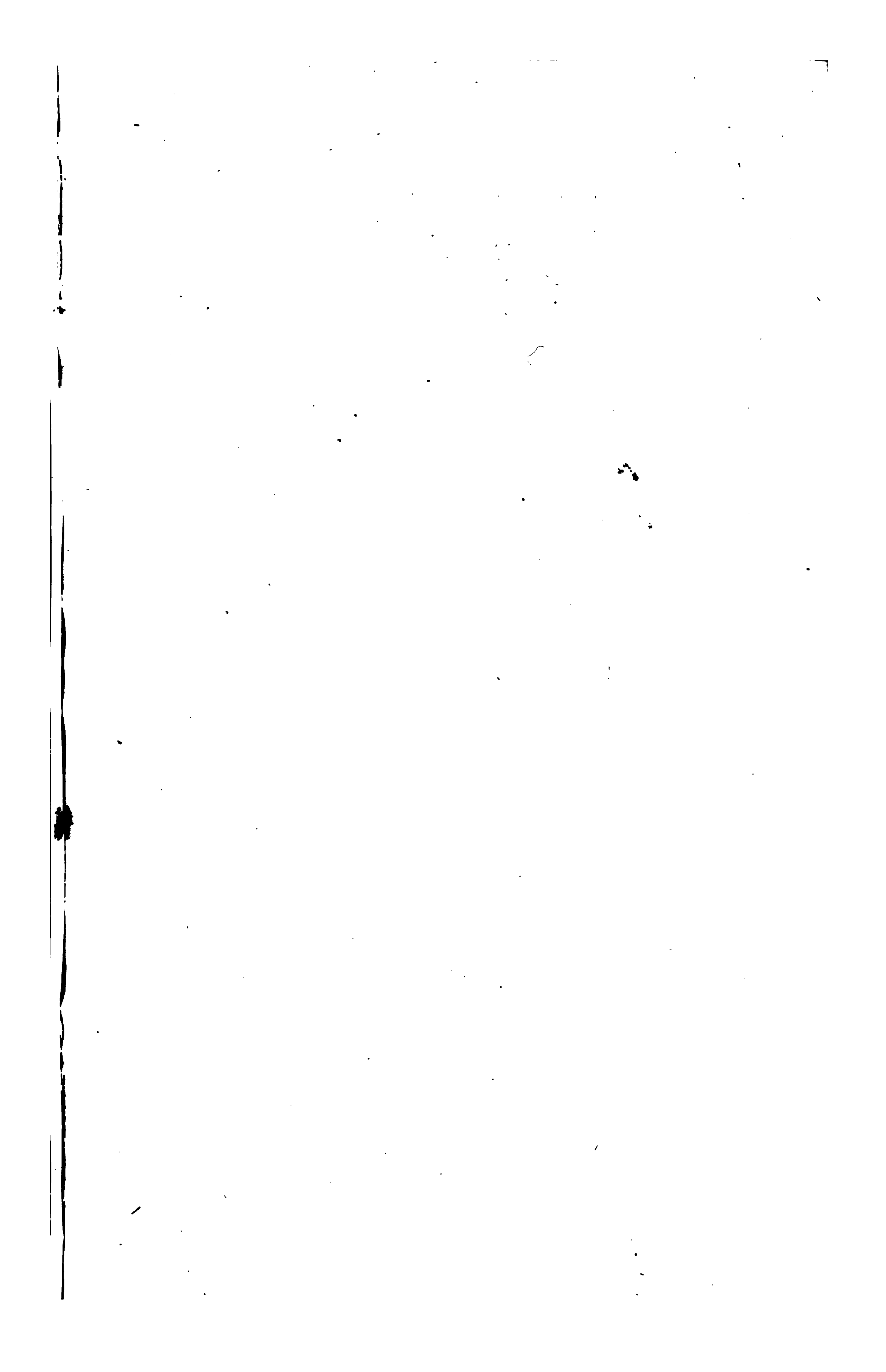
70.

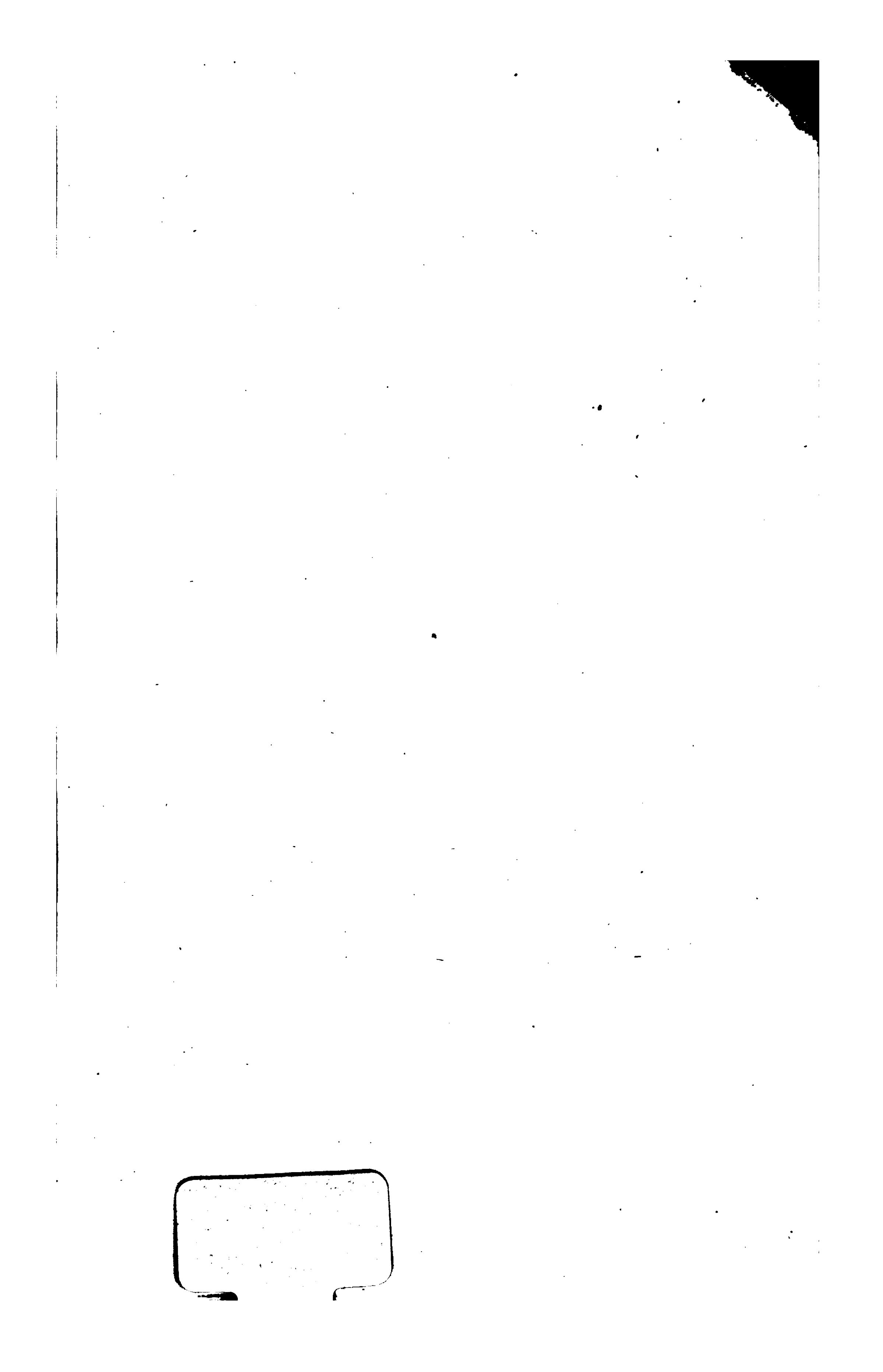
69.

67.

68.

Lith. Anst v. Leopold Kraatz in Berlin.






Math 8508.63.2
Elemente der analytischen Geometrie
Cabot Science 003348283
3 2044 091 918 987